

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 6 月 8 日現在

機関番号：12605

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2009 ～ 2011

課題番号：21540009

研究課題名（和文） 有限群におけるカルタン行列の固有値とブロックの森田同値性

研究課題名（英文） Eigenvalues of Cartan matrices and Morita equivalences of blocks in finite groups

研究代表者

和田 倶幸 (WADA TOMOYUKI)

東京農工大学・大学院工学研究院・教授

研究者番号：40003008

研究成果の概要（和文）：奥山・和田の共同研究[Okuyama-Wada, *Contemp. Math.*, 524, 2010]で、有限群  $G$  とその指数が素数  $p$  と素な正規部分群  $H$  において、 $G$  の  $p$ -ブロック  $B$  と、 $B$  によって cover される  $H$  の任意の  $p$ -ブロック  $b$  について、 $B$  と  $b$  のそれぞれのカルタン行列の最大固有値は一致することを証明した[Okuyama-Wada, *Theorem 1.1*]. さらに Proposition 3.5 で、 $B$  に属する既約 Brauer 指標たちの次数に関するある条件 (#) が成り立つならば、 $B$  のカルタン行列の固有値の中にちょうどその  $(\pi)$ -part が不足群  $D$  の位数に一致するようなものが存在することを証明した. 条件 (#) は  $p$ -可解群の任意の  $p$ -ブロックは常に満たしているが、一般の群では成り立たない.  $p > 3$  の時には (#) を満たさない群とブロックが存在する. しかし  $p=2, 3$  のときには、このような反例を見つけることはできなかった. そこで  $p=2$  のときに、対称群の 2-ブロックについて既約 Brauer 指標の次数を計算するうち、対称群の任意の 2-ブロックは常に条件 (#) を満たしているようにみえた. さらに強く、清田・奥山・和田の共同研究[Kiyota-Okuyama-Wada, *accepted*]により、任意の対称群において、任意の 2-ブロックには高さ 0 の既約 Brauer 指標はただ一つしかないことを証明した. これは Fong, James により知られていた、対称群において奇数次数の既約 2-Brauer 指標は自明な指標しかないという定理の一般化である. この結果は今まで全く知られていなかった事実である. カルタン行列の固有値を考えていなければ、この衝撃的な事実を発見できなかったであろう.

研究成果の概要（英文）：Let  $G$  be a finite group and  $H$  be a normal subgroup of  $G$  with  $p'$ -index. Let  $B$  be a  $p$ -block of  $G$  and  $b$  be any  $p$ -block of  $H$  covered by  $B$ . Then in Theorem 1.1 of the work of Okuyama-Wada [Okuyama-Wada, *Contemp. Math.*, 524, 2010], we have proved that the largest eigenvalues of  $B$  and  $b$  are equal. Furthermore, we have proved that if  $B$  satisfies a certain condition (#) on the degrees of irreducible Brauer characters in  $B$ , then there exists an eigenvalue  $\lambda$  of  $B$  such that the  $(\pi)$ -part of  $\lambda$  is equal to the order of defect group  $D$  of  $B$ . Any  $p$ -block of  $p$ -solvable group satisfies (#), but it does not hold in general. There exist counter examples for  $p > 3$ , however we could not find a counter example for  $p=2$ . How is a 2-block of the symmetric group? Calculating the degrees of irreducible Brauer characters, any 2-block of the symmetric group seems to satisfy (#). Furthermore, Kiyota, Okuyama and Wada have recently proved a stronger result than (#) that any 2-block of the symmetric group of arbitrary degree has a unique irreducible Brauer character of height 0 [Kiyota-Okuyama-Wada, *accepted*]. This generalizes the theorem of Fong, James that the degree of every non-trivial irreducible 2-Brauer characters of the symmetric group is even. This theorem has never been known. We could not discover this remarkable fact if we would not consider eigenvalues of the Cartan matrices of finite groups.

## 交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010年度	900,000	270,000	1,170,000
2011年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	2,900,000	870,000	3,770,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：群の表現論

### 1. 研究開始当初の背景

有限群におけるカルタン行列の固有値、特に最大固有値である Perron-Frobenius 固有値はどのような場合に整数になるだろうか。そのときの群およびブロックの構造はどのようなものか。またそのときの固有ベクトルはどのようなものか、というのが本研究の根本にある問題である。カルタン行列の固有値については、先行する結果がほとんど無く、著者や清田正夫が独自にいろいろな群で調べてきた。

有限群  $G$  の主  $p$ -ブロック  $B$  の不足群がアーベル群とする。  $B$  におけるカルタン行列のフロベニウス固有値が整数なら、  $B$  とその Brauer 対応子  $b$  は森田同値だろうか、という和田の問題を考えていた。森田同値性は導来同値性よりも強く、Broué のアーベル不足群予想と深く関係している。

$p=2$  のときは、功刀・和田 [J. Algebra, 319, 2008] により肯定的に証明されていた。その中で、ある重要な Lemma を使った。  $G$  とその正規部分群  $H$  で指数が  $p$  と異なる素数  $q$  であるとする。  $G$  と  $H$  のブロック  $B$  と  $b$  で、  $B$  が  $b$  を cover するとき、それぞれのカルタン行列の最大固有値が一致するというものであった。  $|G:H|=q$  という強い条件を、  $|G:H|$  が  $p$  と素であるとき、と一般化することを大きな目標とした。

### 2. 研究の目的

上に書いたことを証明するのが当初の目的であったが、それは奥山・和田の論文 [Okuyama-Wada, Contemp. Math., 2010] の Theorem 1.1 で証明することができた。さらに Theorem 1.1 がいろいろな応用をもつであろうと思われ、いくつかの場合について考えることを目的とした。しかし、和田が Okuyama-Wada の Proposition 3.5 について考えていくうち、成果に書いた対称群の 2-モジ

ュラー表現について、大きな定理が成り立つと感ずるようになり、この定理を証明することを本研究の後半の大きな目的とした。

### 3. 研究の方法

(1) 2009年6月、和田がスペインのヴァレンシア大学における Isaacs Conference に参加し、多くの著名な研究者たちと情報交換ができた。2010年8月には東京で開催された ICRA (International Conference on Representation of Algebra) にドイツのイェナ大学の Burkhard Külshammer を招いた。同時に我々が行っている東京理科大学における表現論セミナーで、Külshammer とオックスフォード大学の Susanne Danz に講演をしてもらった。また清田・奥山・和田の共同研究については、著者がドイツのイェナ大学に Külshammer を訪れ、Algebra Seminar で講演した。我々の問題が、Danz-külshammer の提唱した、対称群の単純加群の vertex と source に関するある問題と深く関係していることがわかり、大変参考になった。いずれも海外の最先端で盛んに研究している研究者たちとの交流は、研究の刺激にもなり、また重要な情報を得られるため、数学の研究に関してとても大切な方法の一つである。

(2) 重要な文献を電子的に利用できたり、単行本として手に取れることは最も基本的で大切な方法である。日本語で昔から知られた対称群の表現に関する言葉遣いが、どの時点で、どの文献に書かれているのかが分からないことがあった。東大の図書室で、文献を調べる内に、Herman Weyl の Classical Groups に行き着くことになり、当初予想した本ではなかったことが判明した。

(3) Web 上にある表からコンピュータと計算ソフトを用いて計算することは、数学の研究でも標準的になり、コンピュータの使える環境の整備は欠かせない。また、一人では証

明の道筋を見つけるのが難しく、多くの研究者の助言や異なる見方がとても役に立った。研究集会出席や助言を求めて直接本人を訪れる出張から大きなヒントをもらうこともあった。

共同研究者である奥山哲郎、連携研究者の、山形邦夫、清田正夫、福島博、功刀直子の助力に寄るところが大きい。

清田と功刀は東京理科大における表現論セミナーの開催にあたり、その原動力となった。表現論セミナーでは、国内外の表現論研究者に最近の研究について講演してもらった。それは職を持つ研究者にとっても、職を探す研究者にとっても、聴きに来る学生にとっても大きな刺激となり、交流の場となった。

#### 4. 研究成果

2008年 Journal of Algebra に出版した功刀・和田の論文がきっかけになり、2010年に東京で開催された ICRA(International Conference on Representation of Algebra)で、奥山・和田の共同研究の結果であるカルタン行列の固有値と一般指標の関係について発表した。また奥山・和田の論文がアメリカ数学会の雑誌 Contemporary Mathematics に掲載された。

その Theorem 1.1 によって、功刀・和田の論文中では、その証明に Feit-Thompson の大定理を用いたが、それが不要になった。また Theorem 1.1 を用いて、越谷・吉井 [Koshitani-Yoshii, J. Algebra, 324, 2010] が、当初の背景に書いた和田の問題を  $p=3$  の場合に肯定的に解決した。

また、研究成果の概要に書いたが、奥山・和田の論文の Proposition 3.5 がきっかけとなり、任意の次数の対称群における、任意の 2-ブロックには高さ 0 の既約 Brauer 指標は唯一つしかないという清田・奥山・和田の論文が Journal of Algebra に accept された。

すでにこの論文について John Murray は、 $p=2$  の特殊性から、Gow, Willems, Murray 自身による、より一般的な考察を用い別証明を与えようとしている。

また連携研究者の山形邦夫は、有限次元加群の組成剰余加群の類似を Auslander-Reiten quiver の連結成分に導入して、表現圏の代数的性質をとらえる研究を行った。

「Skowroński-Yamagata のガロア被覆存在判定法」を適用して、ある条件の下で多元環が有限大域次元を有するガロア被覆をもつことを証明した。これは M. Karpicz, A. Skowroński との共同研究の成果である。

加群の準同型多元環については、1958年の森田紀一によって行われた有名な研究の見直しを山形が行った。その結果、有限次元多元環が自己入射多元環上の忠実加群の準同型多元環に同型である（このような多元

環を森田多元環と呼んだ）ことは、ある両側加群への多元環の作用だけで特徴付けられるという驚くべき簡明な同値条件を発見した。これは O. Kerner との共同研究の成果である。

2010年8月には東京で有限次元多元環の表現論国際会議を山形が主催し、世界の研究者らによる多くの成果発表や研究交流を行い、成果をヨーロッパ数学会より出版した。またこれまで行ってきた研究成果の出版を企画し、その第一巻を 2011年にヨーロッパ数学会より出版した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 8 件)

- ① M. Kiyota, T. Okuyama, T. Wada, The heights of irreducible Brauer characters in 2-blocks of the symmetric groups, Journal of Algebra, pp 18, accepted, (2012), 査読有.
- ② Maciej Karpicz, Andrzej Skowroński, Kunio Yamagata, On selfinjective Artin algebras having generalized standard quasitubes, Journal of Pure and Applied Algebra, 215 巻 11 号 (2011), 2738-2760, 査読有.
- ③ R. Kessar, N. Kunugi, N. Mitsuhashi, On saturated fusion systems and Brauer indecomposability of Scott modules, Journal of Algebra, 340 巻 1 号 (2011), 90-103, 査読有.
- ④ Tetsuro Okuyama, Tomoyuki Wada, Eigenvalues of Cartan matrices of blocks in finite groups, Contemporary Mathematics, Amer. Math. Soc., 542 (2010), 127-138, 査読有
- ⑤ S. Koshitani, N. Kunugi, Trivial source modules in blocks with cyclic defect groups, Mathematische Zeitschrift, 265 巻 1 号 (2010), 1161-1172, 査読有.
- ⑥ M. Holloway, S. Koshitani, N. Kunugi, Blocks with nonabelian defect groups which have cyclic subgroups of index  $p$ , Archiv der Mathematik (Basel), 94 巻 2 号 (2010), 101-116, 査読有.
- ⑦ Kunio Yamagata, 有限次元自己入射多元環の表現とその周辺, 日本数学会編集「数学」, 61 巻 3 号, 270-292 (2009), 査読有.

- ⑧ Hiroshi Fukushima, Irreducible products of characters of solvable groups, *Journal of Algebra*, 321(2009), 312 -315, 査読有.

[学会発表] (計 12 件)

- ① Tomoyuki Wada, The heights of irreducible Brauer characters in 2-blocks of the symmetric groups, Algebra Seminar, Friedrich Schiller University at Jena (Germany), 2011 年 9 月 22 日, 招待講演.
- ② Tetsuro Okuyama, Masao Kiyota, Tomoyuki Wada, 対称群の 2-ブロックにおける既約 Brauer 指標の高さ, 有限群のコホモロジーとその周辺シンポジウム, 京都大学数理解析研究所, 2011 年 9 月 1 日.
- ③ Naoko Kunugi, Fusion system とスコット加群の Brauer 直既約性, 有限群のコホモロジーとその周辺シンポジウム, 京都大学数理解析研究所, 2011 年 8 月 29 日.
- ④ Tetsuro Okuyama, Masao Kiyota, Tomoyuki Wada, 対称群における 2-modular 既約加群の 2-height, 第 28 回代数的組み合わせ論シンポジウム, 大分大学, 2011 年 6 月 20 日.
- ⑤ Naoko Kunugi, Scott modules and blocks of finite groups, Workshop "Global/local conjectures in representation theory of finite groups", Banff International Research Station (Canada), 2011 年 3 月 17 日, 招待講演.
- ⑥ Tomoyuki Wada, Cartan eigenvalues of blocks of finite groups, 日本数学会, 名古屋大学, 2010 年 9 月 22 日.
- ⑦ Tomoyuki Wada, Generalized characters and Cartan eigenvalues in finite groups, The XIVth International Conference on Representations of Algebras, 国立オリンピック記念青少年センター, 東京, 2010 年 8 月 15 日.
- ⑧ Maciej Karpicz, Andrzej Skowroński, Kunio Yamagata, On selfinjective Artin algebras having generalized standard quasitubes, The XIVth International Conference on Representations of Algebras, 国立オリンピック記念青少年センター, 東京,

2010 年 8 月 12 日.

- ⑨ Naoko Kunugi, Scott modules and equivalences between blocks of finite groups, Univ. of Aberdeen, Algebra Seminar at University of Aberdeen (UK), 2010 年 3 月 18 日, 招待講演.
- ⑩ Naoko Kunugi, Morita equivalent blocks of general linear groups in non-defining characteristic, RIMS 研究集会「代数的組合せ論および関連する群と代数」, 信州大学, 2009 年 11 月 20 日.
- ⑪ Naoko Kunugi, Morita equivalences for general linear groups in non-defining characteristic, RIMS 研究集会「代数的三角圏とその周辺」, 京都大学, 2009 年 7 月 22 日, 招待講演.
- ⑫ Tomoyuki Wada, Eigenvalues of Cartan matrices of finite groups, Isaacs Conference, University of Valencia, Spain, 2009 年 6 月 3~5 日(ポスター).

[図書] (計 2 件)

- ① Andrzej Skowroński and Kunio Yamagata, Frobenius algebras. I. Basic representation theory, EMS Textbooks in Mathematics, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2011. xii+650 pp., 査読有.
- ② Andrzej Skowroński, Kunio Yamagata (編), Representations of algebras and related topics, Series of Congress Reports, Eur. Math. Soc., Zürich, 2011, xii+710pp, 査読有.

[その他]

ホームページ等  
<http://www.tuat.ac.jp/~wada>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

和田 倶幸 (WADA TOMOYUKI)

東京農工大学・大学院工学研究院・教授  
研究者番号: 40003008

### (2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

山形 邦夫 (YAMAGATA KUNIO)  
東京農工大学・大学院工学研究院・教授  
研究者番号：60015849

清田 正夫 (KIYOTA MASAO)  
東京医科歯科大学・教養部・教授  
研究者番号：50214911

福島 博 (FUKUSHIMA HIROSHI)  
群馬大学・教育学部・教授  
研究者番号：30125869

功刀 直子 (KUNUGI NAOKO)  
東京理科大学・理学部・准教授  
研究者番号：50362306