

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 1 日現在

機関番号：13601

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009 ～ 2012

課題番号：21540011

研究課題名（和文）アソシエーション・スキームの表現と圏の研究

研究課題名（英文） Research on representations and categories of association schemes

研究代表者

花木 章秀（HANAKI AKIHIDE）

信州大学・理学部・教授

研究者番号：50262647

研究成果の概要（和文）：アソシエーション・スキームの圏が定義され、いくつかの概念が圏論的に特徴づけられた。アソシエーション・スキームとその強正規閉部分集合との間のクリフォードの定理が得られた。またアソシエーション・スキームとその代数的融合の間にクリフォードの定理の誘導と制限を逆にした形の双対が成り立つことが示された。いくつかのタウリガー代数と整標準一般台代数（integral standard generalized table algebra）も求められた。

研究成果の概要（英文）：A category of association schemes was defined and some notions were understood categorically. Clifford theory of association schemes and their strongly normal closed subsets was proved. Also a dual, induction and restriction are exchanged, of Clifford theory of association schemes and their algebraic fusions was proved. Some Terwilliger algebras and integral standard generalized table algebras were obtained.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009 年度	800,000	240,000	1,040,000
2010 年度	800,000	240,000	1,040,000
2011 年度	600,000	180,000	780,000
2012 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総計	3,000,000	900,000	3,900,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：アソシエーション・スキーム、表現、圏

## 1. 研究開始当初の背景

近年の数学においては、研究対象そのものを考察するだけでなく、その全体のなす圏を考察することが重要になってきている。アソシエーション・スキームについては適当な圏の概念が定義されていなかったため、妥当と思われる定義を見つけることを一つの目標とした。

一方で、アソシエーション・スキームの表現論はまだ不十分であるので、これを充実さ

せるために、クリフォードの定理の一般化を目指した。

## 2. 研究の目的

アソシエーション・スキームの圏を定義し、これまでの結果などに圏論的な解釈を与えることで、理論の更なる発展が期待される。また表現論に関しては、アソシエーション・スキームとその部分構造の表現の関係を調

べることで、帰納法などの議論が行い易くなることが期待される。

### 3. 研究の方法

まず、具体例を調べるために、これまで行なってきた手法で、計算機を使って小さなアソシエーション・スキームの分類を進め、その指標表を計算する。このデータを基に、一般論を予測し、その証明を行い、その理論を構築する。

### 4. 研究成果

論文⑨では、モジュラー表現を用いて、原始的アソシエーション・スキームの既約指標の重複度と位数の上限との関係を調べた。これによって新しい位数の上限に関する公式が得られた。よく知られている絶対上限条件 (absolute bound condition) のモジュラー化とも言える内容になっている。

論文⑧では、アソシエーション・スキームとその強正規閉部分集合の間にクリフォードの定理を一般化した。本質的な部分では E. C. Dade による群次数付き代数のクリフォード理論が適用できるが、更に強く、有限群に対するクリフォードの定理をほぼそのまま一般化したものになっている。これは平坂貢らによって、応用され、この分野の基本的な道具になりつつある。この後、宮崎泰明との共同研究で、結果は更に精密化された (論文は現在査読中)。

論文⑦は、European J. Math. で組まれた、アソシエーション・スキームに関する特集号のために依頼されて執筆したもので、アソシエーション・スキームの表現に関するこれまでに知られている結果をまとめたものである。特にモジュラー表現に関しては、これまでに良い文献がなかった。モジュラー表現についてはブロックに関する未発表であった新しい内容を含んでいる。

論文⑥では、アソシエーション・スキームの圏を最も弱いであろう条件で定義し、その構造を調べた。これによって、閉部分集合、部分スキーム、剰余スキーム、融合、などに圏論的な特徴付けを与えることができた。これはすでに C. French、栗林勝彦らによって、更なる研究につながっている。

論文⑤では、アソシエーション・スキームの表現の核を考え、その表現は実質的には核による剰余スキームの表現として実現され

ることを示した。群の表現でも同様のことが成り立つが、アソシエーション・スキームの表現では指標の核が必ずしも正規閉部分集合とはならないため、注意が必要となる。

論文④では、アソシエーション・スキームの直積とレス積のタウリガー代数の複素既約表現を考え、それは元のアソシエーション・スキームとそのタウリガー代数の表現に関する情報から完全に記述できることを示した。

論文③では、これまでほとんど考えられてこなかった、アソシエーション・スキームとその融合との表現の関係を調べ、特に代数的融合についてはクリフォードの定理の誘導と制限が逆になった、双対とも言える結果が成り立つことを示した。論文⑧の理論は E. C. Dade による群次数付き代数の理論が利用できたが、この場合は群次数付き代数ではなく、独自の理論が必要となる。

論文②では、非可換で6つの関係をもつアソシエーション・スキームの分類のため、その隣接代数の可能性を考え、射影空間のパラメータから、そのような代数 (integral standard generalized table algebra) が得られることを示した。アソシエーション・スキームが存在するためには2-デザインの存在が必要であるが、代数の存在はより一般の状況でもいえる。

論文①では、クラス1の場合と素数位数の場合について、アソシエーション・スキームの有理整数環上の隣接代数のゼータ関数を求めた。これは群環に対してある程度得られている結果の一般化であり、アソシエーション・スキームに対しては新しい試みである。

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 9 件)

- ① A. Hanaki, M. Hirasaka, Commutativity of association schemes of order  $pq$ , East Asian Math. J. 29 (1), 39 – 52 (2013), 査読有 DOI:10.7858/eamj.2013.004
- ② Y. Asaba, A. Hanaki, A construction of integral standard generalized

- table algebras from parameters of projective geometries, Israel J. Math. 194 (1) 395 - 408 (2013), 査読有  
DOI:10.1007/s11856-012-0083-3
- ③ A. Hanaki, Clifford type theorems for association schemes and their algebraic fusions, J. Algebra. 363, 1-7 (2012), 査読有  
DOI:10.1016/j.jalgebra.2012.04.021
- ④ A. Hanaki, K. Kim, Y. Maekawa, Terwilliger algebras of direct and wreath products of association schemes, J. Algebra. 343 (1), 195-200 (2011), 査読有  
DOI:10.1016/j.jalgebra.2011.05.035
- ⑤ A. Hanaki, Faithful representations of association schemes, Proc. Amer. Math. Soc. 139 (9), 3191 - 3193 (2011), 査読有  
DOI:10.1090/S0002-9939-2011-11026-8
- ⑥ A. Hanaki, A category of association schemes, J. Combin. Theory Ser. A. 117, 1207-1217 (2010), 査読有  
DOI:10.1016/j.jcta.2009.10.004
- ⑦ A. Hanaki, Representations of finite association schemes, European J. Combin. 30, 1477-1496 (2009), 査読有  
DOI:10.1016/j.ejc.2008.11.004
- ⑧ A. Hanaki, Clifford theory for association schemes, J. Algebra. 321 (6), 1686-1695 (2009), 査読有  
DOI:10.1016/j.jalgebra.2009.01.006
- ⑨ A. Hanaki, I. Ponomarenko, A modular absolute bound condition for primitive association schemes, J. Algebraic Combin. 29, 447 - 456 (2009), 査読有  
DOI:10.1007/s10801-008-0145-0
- [学会発表] (計 5 件)
- ① 花木章秀, アソシエーションスキームの表現入門, 第 5 回若手会セミナー, 大阪大学, 2013-03-16
- ② 花木章秀, Quasi-permutation characters of special  $p$ -groups, 第 24 回有限群論草津セミナー, 草津セミナーハウス, 2012-07-28.
- ③ 花木章秀, Clifford theory for algebraic fusions of association schemes, 第 23 回有限群論草津セミナー, 草津セミナーハウス, 2011-07-30.
- ④ 花木章秀, Clifford Theory for Association Schemes, 信州代数セミナー, 信州大学, 2011-07-11.
- ⑤ 花木章秀, Categories of association schemes and coherent configurations, 第 26 回代数的組合せ論シンポジウム, 山形「遊学館」, 2009-06-26.

[その他]

ホームページ

<http://math.sinshu-u.ac.jp/~hanaki/>  
(計算機による小さなアソシエーション・スキームの分類結果とその指標表)

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

花木 章秀 (HANAKI AKIHIDE)

信州大学・理学部・教授

研究者番号：50262647