

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 29 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2009～2011

課題番号：21540014

研究課題名（和文） L 関数の微分と保型形式の研究

研究課題名（英文） Research on the derivative of L-functions and automorphic forms

研究代表者 吉田敬之（YOSHIDA HIROYUKI）

京都大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：40108973

研究成果の概要（和文）：保型形式論の基本問題である志村一谷山予想を一般化する予想を定式化した。また二次元コホモロジー群を用いて実二次上のヒルベルトモジュラー形式の L 関数の特殊値を具体的に計算することが可能であることを示した。セルバーグのゼータ関数の例外的零点と群が合同部分群ではないことの関係について考察した。

研究成果の概要（英文）：We formulated a generalization of the Shimura-Taniyama conjecture, which is a fundamental problem in the theory of automorphic forms. We showed that an explicit calculation of special values of the L-function attached to a Hilbert modular form is possible using the second cohomology group; Here Hilbert modular forms are associated to a real quadratic field. We studied exceptional zeros of Selberg zeta functions in view of the noncongruence property of Fuchsian groups.

交付決定額

（金額単位：円）

| | 直接経費 | 間接経費 | 合計 |
|---------|-----------|-----------|-----------|
| 2009 年度 | 1,400,000 | 420,000 | 1,820,000 |
| 2010 年度 | 1,300,000 | 390,000 | 1,690,000 |
| 2011 年度 | 800,000 | 240,000 | 1,040,000 |
| 年度 | | | |
| 年度 | | | |
| 総計 | 3,500,000 | 1,050,000 | 4,550,000 |

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：志村一谷山予想, cohomology 群, L 関数の特殊値

1. 研究開始当初の背景

志村一谷山予想の一般化については、具体的な予想としては二次元のアーベル多様体とジエゲルモジュラー形式の対応についての予想（吉田による）、具体的な種数 3 の曲線と三次のユニタリー群上の保型形式の対応

についての（Blasius による）予想があった。また一般的な Langlands-Arthur による予想もあったが、これは具体的な多様体（或いはモチーフ）にどのような保型形式が対応するかははっきりとは予想していない。

Cohomology 群をつかう L 関数の特殊値の計算については、志村による一変数の場合の

他は全く計算されていなかった。

2. 研究の目的

志村一谷山予想の一般化は保型形式の理論における最も深い問題群につながっている。cohomology 群を使う L 関数の計算は方法に興味がある。

3. 研究の方法

志村一谷山予想の一般化については、高次元の実例を作り出すのは困難であり、思考実験による思弁的方法によった。これに対して Cohomology 群を使う L 関数の特殊値の計算では、理論計算と計算機による数値計算を並行して進める方法によった。

4. 研究成果

(1) 志村一谷山予想の一般化について

代数体に係数を持つモチーフが与えられたとき、このモチーフと同じ L 関数を持つ保型表現を見出すのが問題である。モチーフからある二次のガロワコホモロジー類が定まり、これが分解体を持つ場合には簡明な形で予想が定式化できることを示した。また分解体を持つかどうかについても研究をすすめ、代数的サイクルについての標準的な予想を仮定すれば、因子団としての分解体は存在することを証明した。

上に述べたガロワコホモロジー類は基本的な重要性があり、将来の研究対象になると思われる。また海外にもこの研究に興味を持つ数学者がいて、吉田は2013年夏にバンクーバーで開かれる代数的サイクルの研究会に招待され講演を依頼されている。

(2) コホモロジー群を用いた L 関数の特殊値の計算

実二次体上のヒルベルトモジュラー形式に対して、二次元のコホモロジー群を用いて L 関数の特殊値の比が計算可能であることを示した。これは一変数のときに志村五郎氏が1959年に発表した計算以来50年ぶりに得られた多変数への拡張である。計算の鍵は具体的にモジュラー形式に対応するコサイクルを書く事と、このコサイクルを放物条件を用いて扱う技術である。

副産物として L 関数の特殊値と関係しないヒルベルトモジュラー形式の周期について若干の結果が得られた。ヒルベルトモジュラー形式の L 関数の特殊値については、ランキン-セルバーグ法を使う志村の方法もある

が、コホモロジーを使う方法も興味深い。実際海外の研究会などで講演しても、おおむね好評であった。

(3) セルバーグのゼータ関数の例外的零点と非合同部分群の研究

1956年にセルバーグはフックス群のゼータ関数を定義し、この関数は実軸上の有限個の例外を除いてリーマン予想をみたすことを示した。この例外的零点については実際に存在する例があることをセルバーグとランドルが1974年までに示した。

まずこの例外的零点の非常に簡単な例を構成した。この例はコンパクトな振れのないフックス群をとり、適当な位数有限な指標の核を取ることで得られる。ところで算術的なフックス群のセルバーグゼータ関数は例外的零点を持たないと予想されている。これはセルバーグの予想と呼ばれるが、一般的なラングランズの函手性原理から従うことが示される。今最初にとったフックス群が算術的な場合、例外的零点を与えるフックス群は、この予想から、非合同部分群であると考えられる。実際にこの方法でコンパクトな算術的フックス群の非合同部分群が得られることを証明した。この結果を与えた文献は今までないようである。さらに同様の方法で古典的なモジュラー群の非合同部分群が得られることを示し、非合同部分群についてのモジュラー形式の簡単な構成法を与えた。

(4) Weng 氏の非アーベルゼータ関数の関数体類似の研究

Weng 氏は非アーベルゼータ関数を導入した。その後、小森、鈴木、Ki、Weng 氏らの(共同)研究でこの関数はリーマン予想をみたすことが(一般には有限個の零点を除いて)わかってきた。吉田は階数2で基礎の体が有限体上の一変数代数関数体のとき、Weng 氏のゼータ関数の類似物はリーマン予想をみたすことを証明した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

1. Hiroyuki Yoshida, Cohomology and L-values, Kyoto Journal of Mathematics, 査読有, Vol. 52, 2012, 印刷中

2. Hiroiyuki Yoshida, Motivic Galois groups and L-groups, Clay Mathematics Proceedings, 査読有, Vol. 13, 2011, pp. 603-647.
3. Hiroiyuki Yoshida, On some problems concerning discrete subgroups, Comentarîi Mathematici Univ. Sancti Pauli, 査読有, Vol. 60, 2011, pp. 231-253.
4. Tamotsu Ikeda (with Atsushi Ichino), On the periods of automorphic forms on special orthogonal groups and the Gross-Prasad conjecture, Geometric Functional Analysis, 査読有, Vol. 19, 2010, pp. 1378-1425.
5. Aiichi Yamasaki (with Hidetaka Kitayama), The rationality problem for Four-dimensional linear actions, J. Math. Kyoto University, 査読有, Vol.49, pp. 359—380.
6. 梅田 亨, 非可換不変式論としての Capelli 型恒等式, 表現論シンポジウム講演集, 査読無, 2009, pp. 108-136.

[学会発表] (計 9 件)

1. Hiroiyuki Yoshida, Exceptional zeros of the Selberg zeta function and noncongruence subgroups, L 関数と保型形式についての研究会, 2012 年 3 月 11 日, 東京大学駒場キャンパス
2. Hiroiyuki Yoshida, Cohomology and L-values, 保型形式と保型的 L 関数の研究(研究会名), 2012 年 1 月 17 日, 京都大学数理解析研究所にて
3. Hiroiyuki Yoshida, Cohomology and L-values, Seminar on automorphic forms(研究会名), 2011 年 6 月 6 日, パリ第七大学, Jussieu にて
4. Hiroiyuki Yoshida, On generalizations of Shimura-Taniyama conjecture, 京

都大学数学大談話会, 2011 年 5 月 18 日

5. Hiroiyuki Yoshida, Cohomology and L-values, Motives and modular forms (研究会名), 2010 年 11 月 11 日, UCLA にて
6. Toru Umeda, The first fundamental theorem and its applications, I, II, III, Workshop on invariant theory and related topics(研究会名), 2010 年 2 月 17,18,19 日, Inha(仁荷)大学にて
7. Kaoru Hiraga, $SL(N)$ の L-indistigushability: 局所ラングランズ対応とエンドスコーピー, 日本数学会特別講演, 2009 年 9 月 24 日, 大阪大学にて
8. Hiroiyuki Yoshida, Cohomology and L-values, Zeta function days in Seoul (研究会名), 2009 年 9 月 4 日, Yonsei (延世)大学にて
9. Hiroiyuki Yoshida, CM-periods, Workshop on higher rank L-functions and computations(研究会名), 2009 年 7 月 31 日, Centro de Ciencias de Benasque Pedro Pascuel(Spain)

[図書] (計 1 件)

梅田 亨, 代数の考え方, 放送大学教育振興会, 2010, pp. 222.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

吉田敬之 (YOSHIDA HIROYUKI)
京都大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 40108973

(2) 研究分担者

池田保 (IKEDA TAMOTSU)
京都大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 20211716

平賀郁 (HIRAGA KAORU)
京都大学・大学院理学研究科・講師
研究者番号: 10260605

梅田亨 (UMEDA TOORU)
京都大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号： 00176728

山崎愛一 (YAMASAKI AIICHI)
京都大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号： 10283590