

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年6月1日現在

機関番号：18001

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2011

課題番号：21540015

研究課題名（和文）平面分割の数え上げに現れる行列式・パフィアンと数理物理モデルへの応用研究

研究課題名（英文）The determinants and Pfaffians appearing in the enumeration of plane partitions and its applications on mathematical physics

研究代表者

石川 雅雄（ISHIKAWA MASAO）

琉球大学・教育学部・教授

研究者番号：40243373

研究成果の概要（和文）：いろいろな対称性を考慮した平面分割の数え上げでは、その母関数が行列式やパフィアンで与えられることが多い。ここでは、それらの行列式やパフィアンの評価の仕方について研究の進展があった。これらの行列式やパフィアンの評価はハンケル行列式や直交多項式と密接な関係があると思われる。最近の研究においてハンケル型のパフィアンをデ・ブルンの公式によってセルバーグ積分の特別な場合に帰着する手法の研究が進展した。セルバーグ積分は直交多項式や Dunkl オペレータと密接に関連しており、その評価は直交多項式の変数化によって行うことができる。また、これらのハンケル型行列式・パフィアンと対称性を考慮した平面分割の数え上げ問題に現れる行列式・パフィアンとの関係は成分の母関数を考えることによって得られる。これらの行列式・パフィアンに密接に関係していると思われる直交多項式は associated Jacobi 多項式である。このことはハンケル型の行列式・パフィアンの成分として直交関数のモーメントを考える。数え上げ問題に関連したモーメントの母関数の連分数展開を調べることによって、考察すべき測度が associated Jacobi 多項式のそれであることを見る。

研究成果の概要（英文）：In the enumeration problems of plane partitions under several symmetries and their generalizations we obtain several interesting determinants and Pfaffians as their generating functions. We have been interested in the evaluation of these determinants and Pfaffians and have been intensively studied those evaluation problems. Several studies have been hinted close relations between the evaluation of Hankel determinants and so-called Hankel Pfaffians and the evaluation of the determinants and Pfaffians appearing in the enumeration problems. In our recent study we find a method to evaluate Hankel Pfaffians by the Selberg integrals through de Bruijn's formula. In fact it is well-known that the Selberg integrals and its extensions are closely related to the orthogonal polynomials and Dunkl operators and its evaluation can be obtained by multivariate generalizations of the classical orthogonal polynomials. Further we can relate the Hankel determinants and Pfaffians with the determinants and Pfaffians appearing in our enumeration problems by manipulations of the generating functions of the entries of determinants (Pfaffians). Especially the associated Jacobi polynomials play an important role in the enumeration of the plane partitions because its distribution measure is related to Gauss's hypergeometric series ${}_3F_2$. We consider Hankel determinants or Pfaffians whose entries are obtained from moments of a class of orthogonal polynomials. The moment generating function related to our enumeration problems seem to be related to the associated Jacobi polynomials by considering the continued fraction expansion of the moment generating function related to our enumeration problems.

交付決定額

(金額単位：円)

| | 直接経費 | 間接経費 | 合計 |
|--------|-----------|-----------|-----------|
| 2009年度 | 1,400,000 | 420,000 | 1,820,000 |
| 2010年度 | 1,000,000 | 300,000 | 1,300,000 |
| 2011年度 | 1,100,000 | 330,000 | 1,430,000 |
| 年度 | | | |
| 年度 | | | |
| 総計 | 3,500,000 | 1,050,000 | 4,550,000 |

研究分野：数物系科学B

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：群の表現論・代数的組み合わせ論

1. 研究開始当初の背景

- (1) いろいろな対称性を考慮した平面分割の数え上げ問題として、cyclically symmetric plane partitions, totally symmetric plane partitions, cyclically symmetric self-complementary plane partitions, cyclically symmetric transpose-complement plane partitions, totally symmetric self-complementary plane partitions 等のいろいろなクラスがあるが、これらのクラスの様々な重みに関する母関数は行列式かパフィアンで与えられ、それらの評価は決して易しくない。また、平面分割を rhombus tiling に置き換えることによって、これらの数え上げ問題は matching の問題や hole を入れるなど様々な拡張され、行列式やパフィアンで個数や母関数が記述されることが知られている場合も多い。これらの行列式やパフィアンの評価は解決した場合も多いが、決して容易ではなく、また、未解決の母関数問題もある。
- (2) Tiling 問題などには castelyn-method 等のように数え上げ問題をパフィアンで表す手法があり、いろいろな変種が知られている。特に最近では、漸近的な振り舞いなどいろいろな点で研究されている。
- (3) ランダム行列やランダムプロセス等では行列式・パフィアンが重要な役割を果たし、またマクドナルド多項式などの対称関数との関連も密接である。
- (4) また、最近ではカタラン数のハンケル

行列式とその組合せ論的証明についての研究が注目されており、いろいろな拡張が考えられている。しかしハンケル行列式は本来、直交多項式の古典理論と密接な関係があり、ハンケル行列式の計算は直交多項式に帰着できることが知られている。

2. 研究の目的

- (1) 目的の1つは、totally symmetric self-complementary plane partitions や cyclically symmetric transpose-complement plane partitions の数え上げにおいて、これまででない重みを付けると母関数の間に関連が見いだせることに着想がある。また、cyclically symmetric transpose-complement plane partitions の、この重み付き数え上げの母関数を計算すると、ある FPL (Fully Packed Loops) のクラスの数え上げと重みを含めて一致することが観察される。したがって、これらの行列式やパフィアンの評価や、この FPL の数え上げ問題等の解決が目的の一つである。
- (2) Tiling 問題等に現れるパフィアンの研究やその評価も目的の一つである。
- (3) D-complete posets の2変数 hook formula として名古屋大学の岡田氏による予想がある。この予想はランダムプロセスに関連する平面分割の数え上げ公式との関連で提案された。この hook 公式に取り組んで解決することも目標である。この2変数関数は q と t が現れるのでマクドナルド多項式との関連が特に興味深い。

3. 研究の方法

- (1) 平面分割の数え上げ問題に現れる行列式・パフィアンは、その成分が二項係数や、その q -analogue である Gauss 二項係数であり、超幾何級数 ${}_3F_2$ との深い関連が指摘されてきた。特に、Gessel-Xin 等の論文によって、平面分割の数え上げ問題に現れる行列式とハンケル行列式との関係が研究されている。彼らの研究は行列式に限って、重み付き母関数ではなく個数のみに限っている。しかし、その方法は行列式の成分の母関数を考え、その母関数の変形によって、行列式の値が同じであるが、成分の違う行列式を導き出すことにある。
- (2) **D-complete posets** の 2 変数 hook 公式は Macdonald 多項式の Pierri 公式に深く関連している。方法としては、hook 公式を示すために必要な公式を具体的に計算して、それらを Poerri 公式に帰着することを目標にする。

4. 研究成果

- (1) 平面分割の数え上げ問題に現れる行列式・パフィアンは、Gessel-Viennot の公式を使って得られる。しかし、これらの計算は決して容易ではない。一方ではハンケル行列式という直交多項式の古典理論と結びついて計算される広いクラスの行列式がある。これらは、最近ではカタラン数の行列式等、組合せ論的解釈と関連しても研究されている。
- (2) 一方でハンケル型のパフィアンは、Luque-Thibon 等の先駆的研究があるが彼らは Selberg 積分の証明に hyperpfaffian を用いることが目的であった。我々の目的はハンケル型のパフィアンを Selberg 積分の特別な場合に帰着させることである。例えば成分が Al-Salam & Carlitz 多項式のモーメント関数から得られるハンケル型パフィアンのときは、古典的な Al-Salam & Carlitz 多項式の拡張である多変数対称関数を使って、パフィアンの値に関する予想を証明した。これは q -analogue である。また、Motzkin 数、Delannoy 数、Schroder 数、Narayana 多項式に関連したハンケル型パフィアンについては、Jacobi 多項式に関連した古典的な Selberg 積分や Aomoto extension に帰着することが証明できた。Gessel-Xin の研究した 3 次のカタラン数のハンケル行列式のパフィア

ンに関しては、そのモーメント母関数の連分数展開が ${}_3F_2$ の比の連分数展開と同じであり、Ismail-Masson の研究した death and life process に関連した associated Jacobi polynomials のモーメント母関数と一致することがわかった。このモーメントを与える測度の重み関数は、彼らにより計算されているが、難しい形をしていて、この場合の Selberg 型の積分を計算することは易しくない。しかし、そのような Serbeg 型の積分に帰着することがわかった。

- (3) 岡田氏の (q, t) の 2 変数 hook 公式の予想の証明については、いくつかの d -complete posets について既に計算を行った。Birds と Insets の場合については、証明ができた。しかし、 d -complete posets は全部で 15 の既約なクラスがあり、計算が難しい場合も今のところ多い。
- (4) カタラン数のハンケル行列式の q -analogue の拡張について和歌山大学の田川氏と Metha-Wang 型の行列式の角等を行った。Metha-Wang の行列式は西沢氏によって q -analogue がつくられた。この q -analogue をハンケルから少しずらすと、その値は Askey-Wilson 多項式で書けることを証明した。この値は本質的に 3 つのパラメータしか含んでいない。一方で Askey-Wilson 多項式は 4 つのパラメータを持つ方程式である。我々の行列式はカタラン数を little q -Jacobi 多項式のモーメントに置き換えたものなので、これを big q -Jacobi に置き換えても、必ずしも Askey-Wilson 多項式は得られないことがわかった。我々の等式の証明は、Krattenthaler 型のカタラン・ハンケル行列式の拡張を作り、それを補題として、Askey-Wilson 多項式の特別な場合を漸化的に計算するものである。
- (5) ハンケル型のパフィアンを計算する方法は最初は代数的なものであった。行列の LDU 分解に当たるものを歪対称行列について定義し、little q -Jacobi 多項式のモーメントからつくられるハンケル型パフィアンについて、その分解を見つけ証明する方法である。この結果は論文にまとめられ、現在 Journal of Combinatorial Theory A に投稿中である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 4 件)

- ① Masao Ishikawa and Hiroyuki Tagawa, Zeilberger's Holonomic Ansatz for Pfaffians, ISSAC' 2012、査読有、掲載予定
- ② Masao Ishikawa and Hiroyuki Tagawa, A Pfaffian analogue of q -Catalan Hankel determinants and its application, RIMS Kokyuroku、査読無、1738 巻、2011、102-119
- ③ 石川雅雄・岡田聡一、行列式・パフィアンに関する等式とその表現論、組合せ論への応用、『数学』、査読有、62 巻、2010、85-114
- ④ Masao Ishikawa, Hiroyuki Tagawa and Jiang Zeng, "A q -analogue of Catalan Hankel determinant", RIMS Kokyuroku Bessatsu, 査読有, B11、2009, 11-42.

[学会発表] (計 9 件)

- ① 石川雅雄、A Pfaffian analogue of the Hankel determinants and the Selberg integrals、Topics in Combinatorial Representation Theory、2011 年 10 月 14 日、京都大学数理解析研究所
- ② Jiang Zeng, Pfaffian decomposition and a Pfaffian analogue of q -Catalan Hankel determinants, International Conference on Asymptotics and Special Functions, 2011 年 5 月 30 日、香港市立大学
- ③ 石川雅雄、A Pfaffian analogue of q -Catalan Hankel determinants and its application、組合せ論的表現論とその応用、2010 年 10 月 19~22 日、京都大学数理解析研究所
- ④ 石川雅雄、A Pfaffian analogue of the q -Catalan Hankel determinants, Combinatoire et Théorie des Nombres, 2010 年 9 月 28 日、Institut Camille Jordan, Université Claude Bernard Lyon 1

⑤ 石川雅雄、A Pfaffian Analogue of the q -Catalan Hankel Determinant、65th S'eminare Lotharingien de Combinatoire, 2010 年 9 月 13 日、Strobl (Wolfgangsee), Austria

⑥ 石川雅雄、Fully commutative elements, fully covering elements and d -complete posets、Seminar on analysis of combinatorial structures and its applications for information theory、2010 年 8 月 7 日、ニューミヤコホテル足利

⑦ 石川雅雄、A Partial Proof of Okada's $(q; t)$ -Hook Formula Conjecture for Birds, Diagram Algebras and Related Topics, 2010 年 7 月 5~9 日、Culture Resort Festone

⑧ 石川雅雄、A Partial Proof of Okada's $(q; t)$ -Hook Formula Conjecture for Birds (and Insets)、64th Seminaire Lotharingien de Combinatoire、2010 年 3 月 30 日、Université Claude Bernard Lyon

⑨ 石川雅雄、Enumeration Problem of Certain classes of FPLs and Plane Partitions、Combinatorics Summer School 2009 (COS 2009)、2009 年 9 月 2 日、稚内北星学園大学

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況 (計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

[その他]
ホームページ等
<http://www.uec.tottori-u.ac.jp/~mi/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

石川 雅雄 (Ishikawa Masao)
琉球大学・教育学部・教授
研究者番号：40243373

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

岡田 聡一 (Okada Soichi)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・
教授
研究者番号：20224016