

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年5月15日現在

機関番号：15301

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2011

課題番号：21540017

研究課題名（和文）保型表現の ε -因子と分岐成分の導手研究課題名（英文）Study on ε -factor of automorphic representations and conductor of ramified components

研究代表者

石川 佳弘（ISHIKAWA YOSHIHIRO）

岡山大学・大学院自然科学研究科・助教

研究者番号：50294400

研究成果の概要（和文）：

フェルマ予想(FLT)の様な数論の問題は、非常に広範で深い理論を駆使して研究される。FLTの証明をも含み、70年代より数論研究の支柱たり続けている Langlands プログラムに沿って、比較的小さい群 $U(3)$ の場合に、その分岐表現 と 付随する L/ε -因子を研究した。方針は、 L -関数を 上の群を対称性にもつ保型形式という"関数"の積分変換で 表示し、その積分の分岐因子を ホイタッカー関数を通じて 明示的に研究する。 $U(3)$ が実 Lie 群/ p -進不分岐群の場合には、期待通りの性質を持つホイタッカー関数を同定出来た。

研究成果の概要（英文）：

Number theory investigation usually involves quite vast area of deep mathematics, like as the Fermat Last Theorem does. The Langlands Program, which led to the settlement of FLT, has been the central strategy of arithmetic since 70s. We follow the LP to study the ramification theory of the group $U(3)$ representations in view point of L/ε -factors. Our approach is resorting to integral presentations of L -function of automorphic forms, whose ramified factors give us arithmetic info. The point is to find nice Whittaker functions appearing in the ramified factor. We can successfully detect where/which the nice ones are in the case of Real/unramified $U(3)$.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2010年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2011年度	1,000,000	300,000	1,300,000
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：保型形式，表現論， L -関数

1. 研究開始当初の背景

分岐する素点に於いて 数論的対象の局所的振舞いを調べる分岐理論は、数論研究に於いて中心的課題の一つであり続けている。局所類体論は完成された一つの典型である。その広範な一般化が、局所体上の代数多様体の分

岐理論、ガロア表現の分岐理論として、斎藤毅氏により展開されている。

一般に、数論の重要な問題の多くは、 L -関数の性質として翻訳可能である。分岐理論もガロア表現に付随する L -関数の関数等式に現れる ε -因子の中に深くエンコ

一ドされているのである。

しかし、数論的対象から代数的に定義される L-関数を直接に研究することは、一般には大変困難である。そこで「解析的に定義される保型 L-関数の研究に帰着させる」というのが、20世紀中葉以降 数論研究の中心戦略となっている(Langlands 哲学)。保型表現の研究が、数論の問題に対して深い結果をもたらすのである。かのフェルマ予想も、一変数保型形式の L-関数 と 有理係数楕円曲線の L-関数の対応を示す事で解決されたのであった。

近年 L-関数の数論研究は 次の段階、即ち 特殊値の研究に移行してきている。上の対応を通じて、更に深い数論的情報を L-関数から読み取ろうというのである。この段階に於いては、L-関数の 分岐因子の精緻な研究が不可欠である。

代数的 L-関数のサイドには、多変数/高次元の場合にも、斎藤毅氏の ガロア表現の分岐理論、Rapoport, Haines 等の 算術的商多様体の悪い還元とニアバイ サイクルの理論など、高度に発達した研究がある。

しかるに、保型 L-関数については、まだまだ分岐因子の研究は 立ち遅れている。本質的に一変数保型形式の場合と同様に扱える GL(2)の保型表現については、深い結果が現れてきているものの、一般の群 G の保型表現に対しては、特殊な状況での散発的研究しかない。

2. 研究の目的

以上の研究状況に鑑み、本研究では、今後の数論研究の礎に資するべく「保型 L-関数の局所理論の再構築」を目指す。即ち、これまでその定義すら等閑にされてきた多変数保型形式に対する保型 L-関数の分岐 L-因子、 ε -因子を、一般化 Whittaker 関数の積分変換の研究を経由することで、数論の局所的/大局的問題への応用に耐えうるレベルまで 明示的に研究する。ここで、大局的問題とは上記の「L-関数の特殊値の研究」を意味し、局所的問題とは「p-進リー群 $G(Q_p)$ の許容表現 π_p の分岐理論」を想定している。

種々の総合を要する「特殊値の研究」については、射程圏内に睨みつつも将来への課題とし、本研究では、群 G が比較的小さい U(3)の場合に、局所問題：分岐理論の完備を目標とする。即ち、

(1)明示公式の所産として得られる局所関数等式から"new vector" と "解析的導手"を取り出し、(2)分岐 L-因子の研究 及び (3)表

現の分岐度合の研究

を GL(2)の場合と同程度にまで引き上げる。

3. 研究の方法

(1)<我々の方法>

保型 L-関数の研究法には、大きく分けて、
あ) Eisenstein 級数の定数項を調べる Langlands-Shahidi の方法 と

い) 表現の適切な模型から作られる積分を調べる Rankin-Selberg の方法 がある。

保型表現の黎明期には、"あ)"には限界があり、"い)"の方針の方が強力であろう"と信じられていた。しかし、歴史は人々の期待を裏切ることとなる。90年代終わり頃、H.Kim の観察をブレイクスルーとし、あ)は保型 L-関数の研究に莫大な進展をもたらした。が、この"流行"も一段落を見、適用可能な場合は取り付くされた感がある。

本研究では、30余年前の素朴な方針 い)に立ち帰り、Rankin-Selberg の積分を詳細に研究する事で、将来の数論研究に資すべき基礎を構築する。戦略は、「保型表現の局所成分 π_p に属する (一般化)Whittaker 関数 W_p を明示的に調べる」という 至極単純だが "迂遠な"準備研究を要する 正面突破法である。

(2)<他の方法との比較>

L-関数の分岐因子を決定するだけなら、上の方針は"遠回り"をしすぎている。実際、保型表現が"generic"な場合、Whittaker 関数の漸近挙動だけから分岐因子は計算できる。これは、GSp(4)の場合は Takloo-Bighash が、U(2,1) の場合には 申請者が実行した。また、あ)の方針でも、"generic"な場合には Shahidi が 部分的結果を得ている。

それにも拘らず、我々が 敢えて明示的研究を志向する理由は、次の二点にある。

i) ゼータ積分を具体的に計算する事で、局所関数等式を ε -因子の形まで調べられる。

これにより、分岐表現 π_p の "解析的導手"が定義でき、 π_p の分岐具合の不変量を得ると期待される。これは、GL(2)の triple L-関数に対して、Kudla, Rapoport, Yang の三氏が Steinberg 表現の場合に採った方法である。

更に、 π_p 自身の表現論的性質から決まる "代数的導手"(保型形式のレベルの局所的な対応物)との比較という新しい研究テーマの創制が見込まれる。群が SL(2), U(2) の場合には、Lansky と Raghuram による観察

がある。

ii) 保型 L -関数の特殊値をゼータ積分を通じて研究する際、局所表現のモデルの中に "特別な関数"を見出すことが、肝要である。 $GL(2)$ の場合の Popa,Xue 達の研究では、S-W.Zhang が導入した "Whittaker new form"が、不可欠であった。 $GSp(4)$ の場合にもその存在を傍証する Roberts-Schmidt の研究がある。明示公式と差分系の詳査により、"new vector"の発見が期待される。

4. 研究成果

(1)本研究の目的は、「保型 L -関数の局所理論の再構築」である。即ち、保型 L -関数に対し、その分岐 L -因子 ε -因子を、数論の局所的・大局的問題への応用に耐えうるレベルにまで明示的に研究する。以下の (A) (B) を比較的小さい群 $U(3)$ に対して、研究実施する計画であった。
(A) 積分表示の局所関数等式から ε -因子と "解析的導手"を取り出し、
(B) 表現の分岐度合を計る"代数的導手"との関係を解明する。

(2)2009年度

(i)八月 京都大学において Workshop を執り行い、基本となる群 $GL(n)$ の場合に、知られている結果の分析と拡張に当たっての問題点その解決方針等について、本課題共同研究者を含む国内の専門家と討議を行った。

(ii) (A) については、 $GL(\text{prime})$ の場合に、Godement-Jacquet 積分から "解析的導手"を計算した。
 $U(3)$ の Steinberg 表現の場合には、Whittaker 関数の明示公式及びそのゼータ積分による標準 L -関数の分岐因子は得られたが、経絡作用素の計算で停滞している。
(B) については、分岐度合を測るコンパクト群からのアプローチを継続した。 $GL(\text{prime})$ の場合には、条件付きでは知られていた過去の結果に一致することが確かめられた。

(iii)森山は、 $GSp(4;\mathbb{R})$ の場合に Whittaker 模型の一意性についての結果を得た。
宮内は、 p -進 $U(3)$ の場合に超カスプ表現が Whittaker 模型を持つ条件を同定した。
安田は、Galois 表現の ε -因子について論文を公表した。
高野は、表現 π が相対隣接散系列となる条件を得た。

(3)2010年度

(i)十一月 白馬に於ける Workshop に McNamara 氏を招聘し、被覆群 $GL(\sim)$ の Whittaker 関数の明示公式に

ついて、解説と拡張についての示唆を受けた。上WSを含む多々の研究集会に於いて、本課題共同研究者を含む国内外の専門家と研究討議を行った。

(ii) (B) については、 $U(3)$ の場合に分岐度合を測る良いコンパクト群族が、宮内により提唱された。彼は、 $U(3)$ が不分岐な場合には、この族から定まる"良い"Whittaker 関数の存在と一意性を示した。

(A) については、Gelbart-PS 積分が期待される関数等式を持ち、宮内は示した Whittaker 関数に対し、 ε -因子が取り出せることが判った。この ε -因子が、望まれる形であることも判明し、"解析的導手"の候補が定まった。

(iii)森山は、 $GSp(4;\mathbb{R})$ の場合に Bessel-Whittaker 模型について研究した。
宮内は、 p -進 $U(3)$ の場合に上 (B) に基づき"代数的導手"の候補を見付けた。
また安田は、Galois 表現の L/ε -因子の Hecke 固有値による表示を得た。
高野は、相対隣接散系列表現と相対尖点表現の成果を論文公表した。

(4)2011年度

(i)一月 数理解研での研究集会において、 $U(3)$ の H-period の観点からこれまで得られた成果を報告講演した。また、相対跡公式アプローチと我々の方法積分表示を比較検討するために、三月 岡山大学にて Work Shop を開催し、二方法の利点不利点の明確化と今後の問題について討議した。

(ii) (B) については、宮内は上の結果を、 $U(3)$ が分岐群の場合にも拡張した。
(A) については、無限素点上での対応する結果:Gelbart-PS 積分の局所 new vector を同定した。

(iii)宮内は、彼の"代数的導手"と"解析的導手"が一致することを不分岐 $U(3)$ に対して示した。
安田は、Hecke 固有値による表示を論文公表した。

(5)今後の展望

「分岐 L -因子 及び 表現の分岐度合いと ε -因子の研究」を " $GL(2)$ の場合と同程度にまで引き上げる"という当初の目標は、群 $U(3)$ では完成に近づいてきた。次に向かうべき方向としては、
(i)大域問題「 L -関数の特殊値研究」へのこれまでご得られた研究成果の応用
(ii)局所問題:群 $U(3)$ を越えて、これまでご得られた研究成果の高ランク群への拡張が望まれる。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計22件)

(1)Tomonori Moriyama,
Generalized Whittaker functions on $\mathrm{GSp}(2, \mathbb{R})$ associated with indefinite quadratic forms,
J. of the Math. Soc. of Japan 63 (2011), 1203--1262. (査読有り)

(2)Satoshi Kondo, Seidai Yasuda,
Local L and Epsilon factors in Hecke eigenvalues, *J. of Number theory* 132 (2012), 1910--1948. 掲載予定 (査読有り)

(3) 加藤信一, 高野啓児,
Discrete series for symmetric spaces over p-adic fields 数理解析研究所講究録 1765 (2011), 14--24. (査読無し)

(4)宮内通孝,
不分岐 $U(2,1)$ の局所 newform について,
第6回福岡数論研究集会報告集 (2011), 53-64. (査読無し)

(5)石川 佳弘,
Kudla's Yoga --A higher (co)dimensional generalization--,
研究集会「Heegner point と Gross-Zagier 公式」報告集 (2010), 351-368. (査読無し)

(6)石川 佳弘,
保型表現の分岐と導手 -JPSS 理論の紹介-,
京都大学 数理解析研究所講究録別冊 B19 (2010), 135-169. (査読有り)

(7) Shin-ichi Kato, Keiji Takano,
Square integrability of representations on p-adic symmetric spaces, *J. of Funcl. Anal.* 258 (2010), 1427--1451. (査読有り)

(8)石井卓, 森山知則,
Uniqueness of generalized Whittaker models for $\mathrm{GSp}(2, \mathbb{R})$ and the outer automorphism group of $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})$,
数理解析研究所講究録 1715 (2010), 121--126. (査読無し)

(9)森山知則,
保型形式の空間と Hecke 作用素, 第18回整数論サマースクール「アーサー・セルバーグ跡公式入門」報告集 (2010), 1--20. (査読無し)

(10)石川 佳弘,
Rankin-Selberg method --through typical examples--,
第16回整数論サマースクール「保型 L-関数」報告集 (2009), 249-331. (査読無し)

(11)Tomonori Moriyama,
L-functions for $\mathrm{GSp}(2) \times \mathrm{GL}(2)$: archimedean theory and applications,
Canadian J. of Math. 61 (2009), 395-426. (査読有り)

(12)Seidai Yasuda,
Local constants in torsion rings, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* 16(2009), 125-197. (査読有)

(13)Seidai Yasuda,
The product formula for local constants in torsion rings, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* 16 (2009), 199-230. (査読有り)

〔学会発表〕(計51件)

(1)石川佳弘,
H-period, H-distinction and Functorial Lift,
「H-periods, Functoriality and RTF」, 岡山大学理学部,
2012年3月4日.

(2)石川佳弘,
Computation of the orbital integral $J(\theta)$ over $\mathrm{SL}(2)$ and fundamental lemma,
「H-periods, Functoriality and RTF」, 岡山大学理学部,
2012年3月5日.

(3)森山知則,
A Fuchsian differential equation with accessory parameters and Zuckermann's tensoring, "Branching Laws",
シンガポール国立大学, 2012年3月16日.

(4)森山知則,
p進 Poisson 変換による球根数の構成,
「p進代数群の表現論」, 横浜国立大学,
2012年2月17日.

(5)安田正大,
Bernstein center I, II, 「p進代数群の表現論」, 横浜国立大学,
2012年2月17日.

(6)石川佳弘,
On H-periods of generic cusp forms on $U(3)$, 研究集会
「保型形式と保型的L-関数の研究」, 京大数理解析研究所,
2012年1月16日.

- (7) 宮内通孝,
On local newforms for unramified $U(2,1)$,
研究集会「保型形式と保型的L関数の研究」,
京大数理論研究所, 2012年1月16日.
- (8) 宮内通孝,
 p -進不分岐 $U(2,1)$ のニューフォームについて, 研究集会
「有界対称領域の算術商のコホモロジーとモジュラ
ー・サイクル」, 東京大学・玉京セミナーハウス, 201
1年8月5日.
- (9) 近藤 智, 安田 正大
局所 L 因子と局所イプシロン因子のヘッケ固有値によ
る表示, 日本数学会, 早稲田大学, 11年3月20日.
- (10) 加藤 言一, 高野啓児
Discrete series for symmetric spaces over p -adic fields,
研究集会「保型形式と関連する跡公式, ゼータ関数の研
究」, 京大数理論研究所, 2011年1月17日.
- (11) 石川佳弘
Theta correspondences for $SO^*(N)$,
第13回整数論オータムワークショップ,
白馬ハイマウントホテル, 10年11月7日.
- (12) 石川佳弘
 $SO^*(2n+1)$ の二重被覆の $small$ 表現と 函手リフト, 第二
回プレ白馬勉強会, 名古屋大学, 2010年9月21日.
- (13) 安田正大
安定跡公式と志村多様体, 第18回整数論サマースク
ール「アーサー・セルバーグ跡公式入門」, 河鹿往ロイヤ
ルホテル, 2010年9月8日.
- (14) 安田正大
 $GL(n)$ のガロア表現と局所及び大域ラングランズ対応,
「 $GSp(4)$ の数論を中心とした基礎的ワークショップ」,
大阪大学理学研究科, 2010年8月6日.
- (15) 宮内通孝
保型表現の $depth$ 概説 及び $GSp(4)$ の場合の $depth$,
「 $GSp(4)$ の数論を中心とした基礎的ワークショップ」,
大阪大学理学研究科, 2010年8月5日.
- (16) 森山貞則
 $GSp(4)$ から $GL(4)$ へ generic transfer 解説
「 $GSp(4)$ の数論を中心とした基礎的ワークショップ」,
大阪大学理学研究科, 2010年8月3日.
- (17) 森山貞則
実質的Siegel保型形式のFourier展開と保型的L関数,
数学懇話会, 大阪市立大学理, 2010年6月30日.

- (18) 石川佳弘
 p -進被覆群 $GL_n(k)(F)$ の例外表現と 鈴木予想, 第一
回プレ白馬勉強会, 京都大学理学部, 10年6月16日.
- (19) 高野啓児
 p -進対称空間における尖点表現と離散系列表現, 日本数
学会 特別講演, 慶応大学, 2010年3月26日.
- (20) 宮内通孝,
Whittaker models of supercuspidal representations of
unramified $U(3)$, 神戸整数論集会, 神戸大学理学部,
2010年1月12日.
- (21) 安田正大
保型 Euler 系と L 関数の積分公式
九大代数学セミナー, 九州大学, 2009年11月6日.
- (22) 石川佳弘
 p -進被覆群の表現と 局所 ϵ -因子, 懇話会, 京都大学理学
部, 2009年10月28日.
- (23) 安田正大,
Regulators, periods, and special values of automorphic
 L -functions over function fields, "t-motives: Hodge
structures, transcendence and other motivic aspects"
カナダ・バンフ国際研究センター, 2009年9月28日.
- (24) 加藤 言一, 高野啓児
 p -進対称空間の二乗可積分表現について,
日本数学会, 大阪大学, 09年9月27日.
- (25) 石川佳弘
保型的 L -関数の中心臨界値に関する Baruch-Mao の結
果について, 第12回整数論オータムワークショップ,
白馬ハイマウントホテル, 09年9月10日.
- (26) 宮内通孝,
Explicit formula for Whittaker functions for
supercuspidals, 「保型表現の分岐理論へ向けて: ϵ -因子
の明示計算」, 京都大学理学部, 2009年8月12日.
- (27) 石川佳弘
 ϵ -factors for $GL(\text{prime})$ a la Godement-Jacquet
integral,
(28) 石川佳弘
Quick survey of the type theory for $GL(N)$,
(29) 石川佳弘
 ϵ -factors for pairs a la Jacquet-PS-Shalika integral,
「保型表現の分岐理論へ向けて: ϵ -因子の明示計算」
京都大学理学部, 2009年8月10日, 11日, 12日.
- (30) 森山貞則
Construction of supercuspidals : prime N case, 「保型表
現の分岐理論へ向けて: ϵ -因子の明示計算」, 京都大学,

2009年8月10日.

(31) 森山知則

2次元解的Siegel保型形式とそのL関数,
代数セミナー, 東北大学, 2009年6月25日.

(32) 石川佳弘

保型表現のイプシロン因子と導手,
『数論幾何における分岐理論』, 神戸フルーツフラワ-
パーク, 2009年1月12日.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

石川 佳弘 (ISHIKAWA YOSHIHIRO)
岡山大学・大学院自然科学研究科・助教
研究者番号: 50294400

(2) 研究分担者

森山 知則 (MORIYAMA TOMONORI)
大阪大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号: 80384171

安田 正大 (YASUDA SEIDAI)
京都大学・数理解析研究所・助教
研究者番号: 90346065

宮内 通孝 (MIYAUCHI MICHITAKA)
京都大学・大学院理学研究科・研究員
研究者番号: 70533644

(3) 連携研究者

高野 啓児 (TAKANO KEIJI)
明石工業高等専門学校・一般教育・准教授
研究者番号: 40332043