

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 23 日現在

機関番号：15401

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2009 ~ 2012

課題番号：21540018

研究課題名（和文） p 進表現に対する岩澤加群の構造の研究研究課題名（英文） Research on the structure of Iwasawa modules for p -adic representations

研究代表者

高橋 浩樹 (TAKAHASHI HIROKI)

広島大学・理学研究科・准教授

研究者番号：90291476

研究成果の概要（和文）：本研究では、特殊元を系統的に利用することにより、 p 進表現に対する岩澤加群の構造を具体的に調査した。特に岩澤 λ 不変量および ν 不変量が例外的に大きくなる場合に注目した。その結果、有理数体および判別式 $D < 200$ の 122 個の二次体に対しては $p < 300,000$ まで、有理数体および $D < 10$ の 6 個の二次体に対しては $p < 6,000,000$ までの調査が進んだ。さらに、 $tame$ な分岐をする p 次拡大が正規整数底を必ず持つ虚二次体の決定問題、ある種の無限個の円分体に対する岩澤不変量の決定問題においても、手法は異なるものの特殊元が有効に利用されて解決された。

研究成果の概要（英文）：In this research, we investigated concrete structure of Iwasawa modules for p -adic representations by systematic use of special elements. We especially noticed large Iwasawa λ or ν invariants. We computed these invariants of the rational number field and 122 quadratic fields with the discriminant $D < 200$ (resp. 6 quadratic fields with $D < 10$) up to $p < 300,000$ (resp. $p < 6,000,000$). Further, we solved the problem of determination of imaginary quadratic fields which have normal integral basis for any tamely ramified extensions of degree p by effective use of special elements. Moreover we determined Iwasawa invariants of infinitely many cyclotomic fields in some different way.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
2011年度	600,000	180,000	780,000
2012年度	700,000	210,000	910,000
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数論

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：岩澤加群、イデアル類群、Greenberg 予想、円単数、ガウス和、岩澤不変量

1. 研究開始当初の背景

総実代数体の円分 \mathbb{Z}_p -拡大の類数の p 部分が有界であろうという Greenberg 予想に対し 1970 年代に Greenberg 氏は、上記の予想に対する必要十分条件と予想が成立する実例を

取り上げた。

1980 年代以降には小松氏（早稲田大）と福田氏（日本大）、田谷氏（宮城教育大）らによって、判別式が小さな実二次体に対する Greenberg 予想が小さな素数について精力的

に調査された。しかしながら、Greenberg 氏
が取り上げていた判別式 $D=473, 1016$ の実二
次体については、高い次数の単数群を調べ
ることが困難であるために、1995 年頃ま
では予想が確認されていなかった。

筆者と市村氏（茨城大学）は p 進 L 関数
と円単数および補助素数を用いた予想の効
率的な判定法を与え、実二次体を主とし
た多くの円分体の Greenberg 予想の成
立を上記の 2 例も含めて確認した。こ
れは、二種類の特殊元を用いて、個々の
場合にイデアル類群の p 部分の位数の
上界を求める手法である。なお、同時期
に Kraft 氏と Schoof 氏、栗原氏も
円単数および補助素数を用いた判定法を
得ていたが、大きく異なるのは p 進 L
関数という特殊元を積極的に利用して、
円単数を局所単数群に埋め込んだ像とし
てとらえていた点である。

この観点が有効となり、新たにガウス和
と補助素数を用いることによって、イデ
アル類群の p 部分の正確な位数を求め
る計算方法に発展した。これは、三種類
の特殊元と二種類の補助素数を用いるこ
とにより、高速 Fourier 変換によつて
類数やイデアル類群を効率よく計算す
る手法である。この手法は、現在のとこ
ろ、判別式および次数が数億程度の円分
体の実部分体の類数の可除性を厳密に
確かめられる唯一の方法である。

以上のように、円単数や p 進 L 関数、
補助素数を用いた数値的な判定法が開発
され、当初は Greenberg 予想の確認に
用いられていた。

一方、全ての素数 p について p 円分
体の実類数は p で割れないであろうとい
う Vandiver 予想は 150 年ほど前に
Kummer 氏が問題として取り上げたも
のであり、2001 年には Buhler 氏ら
の計算によって、1200 万以下の素数
では予想が成立することが知られていた。

しかし、Cohen-Lenstra タイプの推論
の拡張(参考 GTM83, p. 159)による反
例の個数の算定方法を用いれば、 p_1 から
 p_2 までの Vandiver 予想の反例の期
待値は $(\log \log p_2 - \log \log p_1)/2$ 個
と与えられ、 $p_1=37$, $p_2=1200$ 万と
すると、わずかに 0.73 個でしかなく、
期待値が小さいために反例が得られな
かった可能性がある。

そこで、上記の推論に基づいた期待値
を増加させるために、判別式が小さな
二次体に 1 の原始 p 乗根を添加した
体を対象に含めて実験を行った。

ここで判別式が小さな体を考察する
のは、計算量が判別式に比例する箇所
があるためであり、二次体を考察する
のは付随する Dirichlet 指標の値が
有理数でないときには、明らかに p
円分体と異なる現象が起こる場合
があるためである。

その結果、判別式 f が 200 以下の
122 個の二次体と $200 < p < 200000$
の範囲に対して、51

個の非自明な例の存在が確認された。
期待値は実際の値と非常に近い 49.5
個であり、少なくとも上記の範囲では
上記の算出方法は肯定的であることが
分かった。

2. 研究の目的

特殊元を系統的に利用することによつ
て、さまざまな岩澤加群の構造を調査
し、それらに對する未解決問題の成
立理由を明らかにして解決を目指す。

Greenberg 予想のような現象は、単
に総実代数体だけに見られる現象で
はなく、様々な状況下で存在している
現象だと推測されている。例えば、一
般の代数体に対して最大多重 Z_p 拡
大を考えると、その部分体のイデアル
類群あるいは不分岐拡大から構成され
る岩澤加群はガロア加群として小さい
(擬有限と呼ぶことにする)と予想さ
れている。

さらには、イデアル類群を局所自明な
Selmer 群とみなせば、Abel 多様体
の等分点から構成される Galois 加群
に対する Selmer 群に對しても、ある
種の条件のもとで同様な予想を立て
られ、それは Galois 変形理論の枠
組みを用いてさらに一般化される。

これらの枠組みの中で鍵となるのは、
代数的な対象 (Selmer 群など) と解
析的な対象 (L 関数など) を結びつ
ける岩澤主予想が設定されているケー
スであると考えられる。この場合に、
一般 Greenberg 予想を特殊元を用い
て確認する手法を確立したいと考
えている。

さらに、古典的な場合のようにこの
手法を具体的に用いることによって、
全般的な現象について把握したいと
考えている。古典的な総実代数体の
岩澤主予想は Greenberg 予想から
導出されるが、一般の場合にも明示
的な対応関係を加えることによって
一般 Greenberg 予想によって導出
される可能性を考察する。

この種の推論を一般の岩澤加群に
適用することにより、有限性だけでなく
、その群構造が出現する割合につい
ても推測できる。これらの予測が
実際の現象に近いものであるかどう
か、新たな一般的あるいは強い予想
を導くことになるかどうかについて
明らかにしたいと考えている。

3. 研究の方法

円単数、ガウス和などの数論的
特殊元を有効に利用して、イデアル
類群の擬有限性や単項化に對する
具体的な現象を把握する。

その際に、古典的理論において重
要であった岩澤加群の分類や群によ
る分解という手法を有効に利用し
ていることを強調したい。

なお、1 で述べたイデアル類群の
計算によって、二次体の整数環に
對する高次 K 群の部分群おそ
らく全体) が求まっている。一
般 Greenberg 予想に對する現象
を特徴的なケースで調べる際
には、これらは貴重なデータに

なると期待している。また、 k の正規整数基底の存在問題で k に 1 の原始 p 乗根を添加した体の p イデアル類群が障害として現れることが McCulloh 氏によって示されている。この障害を詳しく調査することにより、全ての tame な p 次拡大について正規整数基底を持つ虚二次体と素数の組について考察する。

4. 研究成果

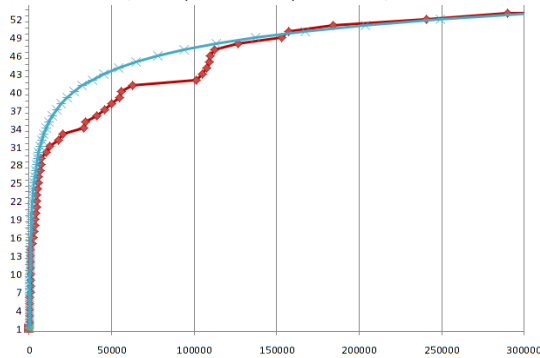
継続的な数値実験による調査対象としては、有理数体および 200 以下の判別式 D の二次体に 1 の原始 p 乗根を添加した円分体を選択し、これらの体の岩澤 λ 不変量および ν 不変量が例外的に大きくなる場合に注目した。4 年にわたる計算により、有理数体および $D < 200$ の 122 個の二次体に対しては $p < 300,000$ まで、有理数体および $D < 10$ の 6 個の二次体に対しては $p < 6,000,000$ までの調査が進んだ。

まず、 $200,000 < p < 300,000$ の範囲において、非自明な実イデアル類群の例は 2 個増加したが、これは予測通りの個数であった。以下に具体的な値を記す。(k は非自明な箇所のタイヒミュラー指標の乗数)

$$(D, p, k)$$

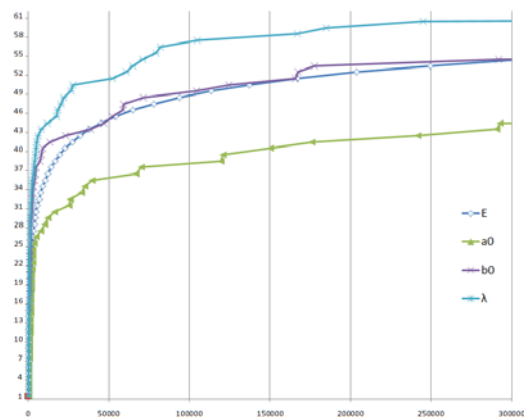
$$\nu^+ > 0, \quad (-43, 240571, 146919)$$

$$\quad \quad \quad (-131, 289897, 186889)$$



実類数の実験値 (青線が予測値)

さらに、岩澤多項式の係数項が p の二乗で割れる個数、多項式が 2 次以上となる個数についても予測通りの増加が確認された。



岩澤多項式の係数、次数の実験値

一方、 $p < 6,000,000$ においては、非自明な実イデアル類群の例は全く見つからなかったが、岩澤多項式の係数が p の二乗で割れる例およびが二次となる例が 4 例見つかった。これらの現象は非常にまれであり、きわめて貴重な例といえる。以下に具体的な値を記す。

$$(D, p, k)$$

$$a_0 > 1, \quad (-4, 399181, 1683)$$

$$\quad \quad \quad (5, 5911877, 162992)$$

$$b_0 > 1, \quad (5, 4953979, 1174520)$$

$$\lambda > 1, \quad (-3, 1744817, 928867)$$

ただし、 a_0 は p 進 L 関数の $s=1$ における値の p 進付値、 b_0 は $s=0$ における値の p 進付値、 λ は岩澤多項式の次数である。

上記の実験結果は、Vandiver 予想および一般 Greenberg 予想などに密接に関わっている。この調査において必要となるのが、円単数、 p 進 L 関数、ガウス和などの特殊元および補助的な素数たちであり、それぞれの元が相互に関連付けられて有効に利用された。

また、ある種の無限個の円分体に対する岩澤不変量の決定問題においても、手法は異なるものの特殊元が有効に利用され解決された。具体的には、論文 1 において導手が $3p^{n+1}$ の円分体の岩澤 λ_3 -不変量を $p < 600$ 、全ての n について決定した。なお、一例を除いてこれらの岩澤不変量は導手が $3p$ の岩澤不変量と一致することが確認された。この現象は 600 以上の全ての素数 p についても成立することが期待されている。

さらに、tame な分岐をする p 次拡大が正規整数基底を必ず持つ虚二次体の決定問題について完全に解決した。3 以下の素数については Carter 氏および市村氏によって解決され、 $p=5, 7, 11$ のときには市村氏との共同研究で解決されていたが、13 以上の素数ではそのような虚二次体が存在しないことを論文 2 において示した。この解決のためには、類体論を精密に利用することが不可欠であった。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 2 件)

1. H. Ichimura, S. Nakajima, H. Sumida-Takahashi, On the Iwasawa lambda invariant of an imaginary abelian field of conductor $3p^{n+1}$, Journal of Number Theory, 133, 査読有, 2013, pp. 787-801
2. H. Ichimura, H. Sumida-Takahashi, On Hilbert-Speiser type imaginary quadratic fields, Acta Arithmetica, 136, 査読有, 2009, pp. 385-389

〔学会発表〕(計2件)

1. 高橋浩樹, The Iwasawa λ_1 -invariants in cyclotomic \mathbb{Z}_p -extensions, 早稲田整数論研究集会, 2013年3月16日, 東京
2. 高橋浩樹, 円分体の岩澤不変量の観察, 九州代数的整数論2012, 2012年3月23日, 福岡

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.mis.hiroshima-u.ac.jp/~hiroki/major/galois1.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

高橋 浩樹 (TAKAHASHI HIROKI)
広島大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：90291476

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：