

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 5月21日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2011

課題番号：21540019

研究課題名（和文） 数論的多様体のレギュレーター写像の研究

研究課題名（英文） An research of regulator maps on arithmetic varieties

研究代表者

竹田 雄一郎 (Yuichiro Takeda)

九州大学・大学院数理学研究院・准教授

研究者番号：30264584

研究成果の概要（和文）：

レギュレーター写像は、数論幾何学における重要な研究対象である。本研究では、代数サイクルとそれに沿った積分を用いて、レギュレーター写像が記述できることを示した。またそこで得られた知見に基づいて、算術的チャーン指標の高次の拡張を構成した。これは、高次算術的K群から高次算術的チャウ群への自然な準同型であり、レギュレーター写像のアラケロフ幾何学における類似と見なすことができる。

研究成果の概要（英文）：

The regulator map is one of the most interesting object of research in arithmetic geometry. In this research we have shown that the regulator map is described as integrals over algebraic cycles. Moreover, we have established a higher extension of the theory of arithmetic Chern character of a hermitian vector bundle on an arithmetic variety. In other words, we have constructed a homomorphism from higher arithmetic K-group to higher arithmetic Chow group. This can be seen as an analogue of regulator map in Arakelov geometry.

交付決定額

(金額単位：円)

|        | 直接経費      | 間接経費    | 合計        |
|--------|-----------|---------|-----------|
| 2009年度 | 1,100,000 | 330,000 | 1,430,000 |
| 2010年度 | 900,000   | 270,000 | 1,170,000 |
| 2011年度 | 700,000   | 210,000 | 910,000   |
| 年度     |           |         |           |
| 年度     |           |         |           |
| 総計     | 270,000   | 810,000 | 3,510,000 |

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：レギュレーター写像，代数サイクル，代数的K理論

## 1. 研究開始当初の背景

レギュレーター写像は、代数的K理論とDeligne コホモロジーという多様体の二つの不変量の間をつなぐ、数論幾何の世界で重要な準同型である。しかし代数的K理論やレギュレーター写像の定義は、ホモトピー論の道具を用いた難解なもので、実際に特定の多様体に対して計算することが困難であった。

一方Goncharovは、代数サイクルから多様体上のカレントへの対応を、積分を用いて定義し、それがレギュレーター写像を記述することを予想した。また彼は、多重対数関数の関数等式から作られるアーベル群の複体を定義して、それを用いてレギュレーター写像を記述できることを予想した。

筆者はGoncharovによるこれらの予想についてBurgos教授と議論して、BurgosとFeliuによる高次算術的チャウ群の構成方法を利用することにより、彼の予想を肯定的に解決することができるはずであるという結論を得た。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、代数サイクルとそれに沿った積分を用いて、レギュレーター写像の研究を行うことであった。具体的には、次のことを達成することを目的としていた。

(1) まず始めに、Burgosとの議論で得た結論に基づいて、Goncharovが構成した代数サイクル上の積分が、実際にレギュレーター写像を与えることを証明することを目標にした。それから、様々な多様体に対してその上の代数サイクルを明示的に構成し、それに沿った積分を計算することによって、レギュレーター写像の像を計算することが目標であった。

(2) Goncharovの予想に関する筆者のアイデアが、アラケロフ幾何学における算術的特性類の理論を高次化を実現するのに役立つことが分かっていたので、それを具現化して高次算術的チャーン指標の理論を確立することも本研究の目的であった。

## 3. 研究の方法

(1) について。BurgosとWangはボット・チャーン形式(計量つきベクトル束のチャーン形式の高次化)の定義の中で、ワン形式と呼ばれる特別な微分形式を用いた。これは射影直線の直積上の微分形式である。最初にそ

の微分形式の代数サイクル上での積分とレギュレーター写像の間の関係を明らかにして、その後でその積分とGoncharovが考えた積分が本質的に同じものであることを示した。

(2) について。Levineが高次チャウ群の研究の中で用いたiterated doubleと呼ばれる多様体を利用した。高次K群の元は、iterated double上のベクトル束の形式和として表されるので、その上の計量つきベクトル束のChern形式の理論と、それに付随するGreen形式の理論を構築することによって、(2)の目的を達成した。

## 4. 研究成果

(1) 本研究の最初の成果は、Goncharovの予想を証明したことである。つまり、高次の代数サイクルに対して、それに沿った積分を対応させることにより、代数サイクルの複体からカレントの複体への写像を定義して、そのホモロジー群をとると、レギュレーター写像が現れることを証明した。これはBurgosとFeliuとの共同の研究の成果である。

この問題で扱われる代数サイクルは高次のもの、つまり多様体とアフィン空間の直積の部分多様体の形式和である。射影直線の直積はアフィン空間のコンパクト化であるが、この代数サイクルの射影直線の直積上での閉包をとり、それに沿ったワン形式の積分をとることにより、元の多様体上のカレントが得られることを筆者達は発見した。そして、それが複体の間の写像を定義することと、それから定まるホモロジー群の間の準同型がレギュレーター写像と一致することを示した。また、筆者達の定義した写像がGoncharovのものと同値なものであることも示した。以上の結果を、共著の論文で発表した。

(2) (1)で得られた、高次の代数サイクル上の積分の応用の研究を行った。数年前に筆者は、これに関していくつかの計算を行っていて、BlochとKrizにより構成された特別な代数サイクルの上でワン形式を積分することにより、多重対数関数が現れるという結果を得ていた。しかし当時は、その結果とレギュレーター写像との関係は明らかではなかった。ところが、(1)の中で得られた結果のおかげで、その計算がレギュレーター写像と多重対数関数の間の新しい関係を示していることが明らかになった。また、2重対数関数とそれに付随する代数サイクルが、この積分により対応することも分かった。

(3) アラケロフ幾何学における計量つきベクトル束の算術的特性類の理論を高次化することに成功した。これは、レギュレーター写像のアラケロフ幾何学における類似物を構成したことに相当する。

ベクトル束のチャーン指標やその算術的な類似は、空間や算術的多様体の $K$ 群からチャウ群への準同型を与える。筆者はこれまでの研究の中で、算術的多様体の高次算術的 $K$ 群を構成していた。これは、計量つきベクトル束から定義される算術的 $K$ 群の高次への拡張である。また Burgos と Feliu は、算術的チャウ群の高次への拡張を定義していた。筆者が達成したことは、この二つの高次への拡張の間の準同型を構成したことである。

レギュレーター写像を定義するためには、ホモトピー論を用いるのが一般的である。しかし、アラケロフ幾何学における算術的チャウ群やその高次への拡張を、ホモトピー群の枠組みで再定義することは難しい。そこで本研究では、それとは別の方法を採用した。

Levine は、多様体に対して、それに付随する iterated double とよばれる既約でない代数多様体（球面の代数幾何における類似物）を考えて、その iterated double 上のグロタンディック群が、元の多様体の高次代数的 $K$ 群を表示することを証明した。筆者は、その iterated double 上の計量つきベクトル束の特性類の理論のアラケロフ幾何学における類似をみつけることが、上記の目標を達成することにつながると考えて研究を進めた。そしてまず始めに、iterated double 上の計量つきベクトル束に付随するチャーン形式の理論を構築することに成功した。

その次に、Levine の結果に現れるいくつかの $K$ 群の算術的類似を定義した。具体的には、多重相対スキーム（スキームとその有限個の閉部分多様体の組）の $K$ 群の算術的類似と、iterated double の算術的 $K$ 群を定義した。このときに、上に述べた iterated double 上の計量つきベクトル束のチャーン形式の理論が、重要な役割を果たした。そして、Levine が与えた $K$ 群の埋め込みの、算術的な類似を証明した。算術的な場合は、 $K$ 群の埋め込みを与えるかどうかまでは分からなかった。しかし、多様体の高次算術的 $K$ 群の任意の元に、それに付随する iterated double の算術的 $K$ 群の元が対応することと、その対応がある微分形式による”ずれ”を除いて一意的であることを示した。

その次に、多様体に付随する iterated double のベクトル束から、元の多様体の代数サイクルへの自然な対応を与えた。Fulton は特異点をもつ多様体上のベクトル束のチャーン類を、ベクトル束に付随する分類写像を通じて与えたが、本研究では彼のその研究を応用した。それから、そのようにして与えた

高次の代数サイクルに関する Green 形式の理論を構築した。その時に、Burgos が定義した代数サイクルに関する Green 形式の理論を用いた。

このようにして、多様体に付随する iterated double 上の計量つきベクトル束に対するチャーン形式と高次の代数サイクルとそれに関する Green 形式が得られた。それらを組み合わせて、Burgos と Feliu が定義した高次算術的チャウ群の元を構成して、それが iterated double の算術的 $K$ 群から高次算術的チャウ群への写像を定義することを示した。そして、多様体の高次算術的 $K$ 群の元に、それに付随する iterated double の算術的 $K$ 群の元を対応させるときに生じる微分形式による”ずれ”が、上述の iterated double の算術的 $K$ 群から高次算術的チャウ群への写像の中で解消することを示した。これにより、多様体の高次算術的 $K$ 群から高次算術的チャウ群への写像を構成することができた。この写像を高次算術的チャーン指標とよぶことにした。

この結果を、2010年9月に京都大学で行われたアラケロフ幾何学の研究集会で発表した。

(4) (3) で得られた高次算術的チャーン指標が多様体の射からきまる引き戻し写像と両立することを示した。また、高次算術的チャーン指標と積構造との関係を研究した。算術的リーマン・ロッホの定理は、アラケロフ幾何学において最も重要な定理である。その高次化を定式化して証明することは、本研究だけでなく、アラケロフ幾何学において非常に重要な問題であるが、この積構造を研究することは、その問題の解決に向けた必要不可欠な第一歩である。筆者は、計量つきベクトル束のテンサー積により決まる、複体の間の写像やホモトピーを明示的に書き下した。そしてそれらの写像やホモトピーのチャーン形式が消えることを示した。それにより、高次算術的チャーン指標が、積構造を保つことを証明した。

(3) と (4) の結果により、高次算術的チャーン指標を構成してその性質を調べるという、本研究の目的を達成した。そしてこの研究成果を論文にまとめた。この論文は非常に複雑で長大なものなので、論文の作成やその証明の推敲に時間を費やした。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 1 件)

- ① J. I. Burgos Gil, E. Feliu, Y. Takeda,  
Goncharov's regulator and higher  
arithmetic Chow groups, International  
Mathematics Research Notices, 2011,  
pp. 40-73, 査読有.

[学会発表] (計 2 件)

- ① 竹田 雄一郎, On explicit regulator  
maps, 丹原数論幾何研究集会, 2009 年 5  
月, 東京大学玉原国際セミナーハウス.
- ② 竹田 雄一郎, Higher arithmetic Chern  
character, Paris-Barcelona-Kyoto  
seminar on Arakelov geometry, 2010  
年 9 月, 京都大学.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

竹田 雄一郎 (Yuichiro Takeda)  
九州大学・大学院数理学研究院・准教授  
研究者番号: 30264584

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし