

科学研究費助成事業 (科学研究費補助金) 研究成果報告書

平成 24 年 5 月 21 日現在

機関番号 : 3 2 6 6 0

研究種目 : 基盤研究 (C)

研究期間 : 2009 ~ 2011

課題番号 : 2 1 5 4 0 0 2 6

研究課題名 (和文) ベルヌイ数と非正則素数の分布に関する研究

研究課題名 (英文) A study of Bernoulli numbers and the distribution of irregular primes

研究代表者

吾郷 孝視 (AGOH TAKASHI)

東京理科大学・理工学部数学科・教授

研究者番号 : 60112893

研究成果の概要(和文) : Bernoulli 数、Genocchi 数及び第 1・2 種 Stirling 数の性状を研究し、それぞれの新しい漸化式と高次合成積に関する恒等式を発見した。また一般化された Frobenius-Euler (FE) 数と多項式に関して、基本関係式と Kummer 型合同式を証明をした後、FE 数に対応している L 型関数を構成した。一方、素数の非正則性に対する新しい判定基準を議論すると共に、非正則対について数値実験から多くの興味深い特性を観察した。

研究成果の概要(英文) : We studied special properties of Bernoulli, Genocchi and Stirling numbers of both kinds and discovered new recurrences and higher-order convolution identities. Concerning generalized Frobenius-Euler numbers and polynomials, we constructed the corresponding L type function after proving basic relations and Kummer type congruences. On the other hand, we discussed new criteria for irregularity of primes and also observed many interesting properties of irregular pairs from numerical experiment.

交付決定額

(金額単位 : 円)

	直接経費	間接経費	合計
2009 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2010 年度	700,000	210,000	910,000
2011 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総計	2,700,000	810,000	3,510,000

研究分野 : 数物系科学

科研費の分科・細目 : 数学・代数学

キーワード : ベルヌイ数、代数体の類数、イデアル類群、正則・非正則素数、素数分布

1. 研究開始当初の背景

(1) Bernoulli 数とその多項式はゼータ関数と深く関係し、昔から数学と物理学において極めて重要な研究対象であった。特に数論においては、基本となる Euler-Maclaurin の総和公式、von Staudt-Clausen の定理、Kummer の合同式などが古くから知られており、近年にお

いても代数体の類数の研究や p -進 L 関数の構成などにおいて重要な役割を担ってきた。漸化関係や合成積についても、Etttingshausen、Euler、Saalschütz、Ramanujan などの古典公式を含め Bernoulli 数の性状を記述する数多くの公式が発見され、様々な形で応用されてきた。Bernoulli 数と深く関わる Euler 数、Genocchi

数、第1・2種 Stirling 数、Nörlund 数、その他の数についても同様である。近年、数え上げ理論と組合せ数論の進展によって新たな手法による Bernoulli 数の研究が盛んに行われ、多くの注目すべき成果が発表されている。

(2) 代数体の類数、特にその素因数の探索はイデアル類群の構造を解明する上で非常に重要である。例えば、素数円分体 $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ のイデアル類群の Sylow p -部分群 A は $G = \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q})$ とするとき $\mathbb{Z}[G]$ -加群であり、群環のベキ等元を使えば $A = \bigoplus_i A_i$ と分解される。Herbrand-Ribet の定理及び Kummer の補題から $A_i \neq 0 \iff p \mid B_{p-i} \iff p \mid h_p^-(B_{p-i})$ (B_{p-i} は Bernoulli 数、 h_p^- は $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ の相対類数) が成立するが、ここで Bernoulli 数と相対類数の p -整除性、すなわち素数 p の正則・非正則性が問題となる。実類数 h_p^+ に関する Vandiver 予想、Demyanenko 型行列とその行列式の代数的意味付けなどを含めて、多くの未解決問題が残されている。

(3) 非正則素数が無限に多く存在することは Jensen の結果により昔から知られているが、正則素数の無限性については未だに解明されていない。Siegel は発見的議論に基づき素数における正則素数の密度は $1/\sqrt{e} \approx 0.6065$ 、従って非正則素数の密度は $1 - 1/\sqrt{e} \approx 0.3935$ であると予想した。Buhler、Crandall、Metsänkylä 達による素数 $p < 12 \times 10^6$ に対する正則・非正則性の検証では、Siegel 予想の信憑性を裏付ける観察結果が報告されている。基本区間における非正則対の特性とその個数である非正則指数の評価に関する研究は困難を極め、相対類数の大きさから演繹された僅かな結果しか知られていない。また任意に大きな非正則指数をもつ素数が存在するであろうと予想されているが、これについては解決の目処さえ立たない。

(4) Ankeny-Artin-Chowla (AAC) 予想は、実 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ ($p \equiv 1 \pmod{4}$) の基本単数を $\varepsilon = (t + u\sqrt{p})/2$ とするとき、 $p \nmid u$ が成立することを主張している。Dirichlet の類数公式から派生した Kiselev の合同式 $hu/t \equiv B_{(p-1)/2} \pmod{p}$ (h は $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ の類数) を経由して、種々の同値な条件が発見されてきた。これらは Bernoulli 数、Fermat 商、Wilson 商、平方剰余と平方非剰余それぞれの積、Lerch 型合同式などとの関係がある。一方で特殊な 2 次無理数、例えば $(1 + \sqrt{p})/2$ などの連分数展開における周期の長さなど近似分数の特性が議論され、AAC 予想の研究に応用されてきた。新しい判定アルゴリズムに基づく数値実験では、 2×10^{11} 以下の全ての素数 p に対して AAC 予想が成り立つことが確認されている (van der Poorten、te Riele、Williams の結果による)。

2. 研究の目的

本研究では幅広い分野からの情報とアイデアを参考にしながら、上で述べた各種研究課題と未解決問題に取り組むこととした。具体的には、Bernoulli 数及びそれと関連する Genocchi 数、第1・2種 Stirling 数などの性状を総合的に研究し、知られている結果を自然な形で一般化すると共に、新しい関係式を開発、証明する。非正則素数の特性と判定法に関しては、主として Bernoulli 数と円分体の相対類数の p -整除性の視点から議論を進め、イデアル類群の構造の一端を解明することを目指す。また数値データから非正則素数の分布状況を予測し、理論的検証を試みる。AAC 予想については、2 次無理数の連分数展開の特性を利用して解明に努める。以上が本研究における主たる目的である。

3. 研究の方法

本研究では連携研究者との討論の場を頻繁に持って情報の交換を行うと同時に、国内外の研究集会や国際会議にも参加して、同種の研究課題に携わっている研究者達 (K. Dilcher、L. Skula、T. Metsänkylä、P. Ribenboim、その他) との学術交流を積極的に行った。数学上の主な研究手法としては、代数的数論と p -進解析からのアプローチ、数え上げ理論と組合せ数論の応用、近似理論と各種評価式の応用、特殊素数判定アルゴリズムと分布関数の応用などであった。

4. 研究成果

(1) Bernoulli 数、第1・2種 Stirling 数、Nörlund 数の性状を研究し、それぞれ特殊漸化式を開発すると同時に、高次多重合成積に関する存在定理を完成した。Bernoulli 数と深く関係する Genocchi 数と Eulerian 数の性状も研究し、Carlitz の結果を拡張して高次合成積に関する一般式を開発、証明した (K. Dilcher 氏との共同研究による)。また一般化された Frobenius-Euler (FE) 数と多項式については漸化関係と合成積に関する基本式を求め、 p -進極限を利用して Kummer 型合同式に簡易な証明を与えた。更に FE 数に対応している L 型関数を構成した (山中雅史氏との共同研究による)。

(2) 正則・非正則素数に対して新しい判定基準を議論し、数値実験によって非正則対に関する様々な興味深い特性、例えば対称な非正則対の非存在性などを観察した。理論的な検証と定式化は今後の課題である。非正則指数については Skula による評価式の改良を試みたが、出現した評価式の複雑さが原因で期待した成果は得られなかった。これも今後の課題として残された。一方で 2 次多項式によって生成される素

数を研究し、初等的な方法を用いて任意に与えた $x > 0$ 以下の素数の個数を正確に記述する Legendre 型公式を求めた。しかし、この種の素数の分布状況、特に無限に多く存在するかどうかについては Hardy-Littlewood 予想と関係しており、簡単に解決できそうにはない。

(3) AAC 予想については、2 次無理数の連分数展開を利用してこの課題と取り組んだ。その結果、2 次無理数 \sqrt{d} (d は完全平方でない自然数) の単純連分数展開における周期の長さが 5 と 7 の場合に、 d の一般形を決定することができた。これを $d = p$ に適用することによって、ある類の素数に対して AAC 予想が成立することが証明された (谷口哲也・服部敦史両氏との共同研究による)。この結果は任意の奇数周期の場合に拡張が可能であり、更に大きな類の素数に対して AAC 予想の検証が期待される。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕 (計 15 件)

- ① R. Tanaka, A Borsuk-Ulam type theorem over iterated suspensions of real projective spaces, *J. of Korean Math. Soc.*, 査読有, Vol.49, no.2, 2012, 251-263
- ② T. Agoh and K. Dilcher, Convolution and reciprocity formulas for Bernoulli numbers, *Integers*, 査読有, Vol.11, no.6, 2011, 849-861
- ③ T. Agoh and K. Dilcher, Integrals of products of Bernoulli polynomials, *J. of Math. Ann. Appl.*, 査読有, Vol.381, no.1, 2011, 10-16
- ④ Y. Hachimori, Iwasawa λ -invariants and congruence of Galois representations, *J. of Ramanujan Math. Soc.*, 査読有, Vol.26, no.2, 2011, 203-217
- ⑤ 八森 祥隆, p -進 L 関数の岩澤による構成について, 第 9 回北陸数論研究集会報告集, 査読無, 2011, 18-35
- ⑥ T. Agoh and M. Yamanaka, A study of Frobenius-Euler numbers and polynomials, *Ann. Sci. Math. Québec*, 査読有, Vol.34, no.1, 2010, 1-14
- ⑦ T. Agoh and K. Dilcher, Recurrence relations for Nörlund numbers and Bernoulli numbers of the second kind, *Fibonacci Quart.*, 査読有, Vol.48, no.1, 2010, 4-12
- ⑧ T. Agoh and K. Dilcher, Convolution identities for Stirling numbers of the first kind, *Integers*, 査読有, Vol.10, no.1, 2010, 101-109
- ⑨ R. Tanaka, On trivialities of Stiefel-Whitney classes of vector bundles over iterated suspension spaces, *Homology, Homotopy and Appl.*, 査読有, Vol.12, no.1, 2010, 357-366
- ⑩ Y. Hachimori and T. Ochiai, Notes on non-commutative Iwasawa theory, *Asian J. of Math.*, 査読有, Vol.14, no.1, 2010, 11-18
- ⑪ Y. Hachimori, Euler characteristics of fine Selmer groups, *J. of Ramanujan Math. Soc.*, 査読有, Vol.25, no.3, 2010, 285-293
- ⑫ T. Agoh, Legendre type formula for primes generated by quadratic polynomials, *Ann. Sci. Math. Québec*, 査読有, Vol.33, no.2, 2009, 115-123
- ⑬ T. Agoh and K. Dilcher, Higher-order recurrences for Bernoulli numbers, *J. of Number Theory*, 査読有, Vol.129, no.8, 2009, 1837-1847
- ⑭ T. Agoh and K. Dilcher, Shortened recurrence relations for Bernoulli numbers, *Discrete Math.*, 査読有, Vol.309, no.4, 2009, 887-898
- ⑮ R. Tanaka, A Borsuk-Ulam type theorem for sphere bundles over stunted projective spaces, *Topology and its Appl.*, 査読有, Vol.156, no.5, 2009, 932-938

〔学会発表〕 (計 8 件)

- ① Y. Hachimori, Iwasawa λ -invariants and congruence of Galois representations, 日韓整数論セミナー 2011, 2011 年 11 月 9 日, 名古屋大学 (名古屋)

- ② 八森 祥隆, 岩澤による skew symmetric pairing の構成について, 整数論セミナー, 2011 年 7 月 8 日, 早稲田大学 (東京)
- ③ 八森 祥隆, p -進 L 関数の岩澤による構成について, 北陸数論研究集会, 2010 年 12 月 26 日, 金沢大学 (金沢市)
- ④ Y. Hachimori, Congruence of Galois representations and anticyclotomic Z_p -extensions, School of Mathematics Seminar, 2010 年 3 月 15 日, Tata Institute (インド)
- ⑤ 八森 祥隆, 非可換岩澤理論の紹介と岩澤代数の性質について, 信州大学理学部数理・自然情報科学科セミナー, 2010 年 2 月 23 日, 24 日, 信州大学 (松本市)
- ⑥ Y. Hachimori, Euler characteristics of fine Selmer groups, 2010 Korea-Japan Number Theory Seminar, 2010 年 1 月 23 日, Seoul (韓国)
- ⑦ Y. Hachimori, Euler characteristics of fine Selmer groups, NAG Seminar, 2009 年 11 月 26 日, Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences (イギリス)
- ⑧ T. Agoh, On Bernoulli and Eulerian numbers, The 19th Czech-Slovak International Number Theory Conference, 2009 年 9 月 3 日, Ostrava University (チェコ)

〔図書〕 (計 2 件)

- ① P. Ribenboim (著), 吾郷 孝視, 真庭 久芳 (訳編), 共立出版, 少年と素数の物語 II はるかなる旅へ, 2011 年 8 月, 総頁数: 235 頁
- ② P. Ribenboim (著), 吾郷 孝視, 真庭 久芳 (訳編), 共立出版, 少年と素数の物語 I その扉をひらく, 2011 年 2 月, 総頁数: 238 頁

6. 研究組織

(1) 研究代表者

吾郷 孝視 (AGOH TAKASHI)
東京理科大学・理工学部数学科・教授
研究者番号 : 60112893

(2) 研究分担者

該当なし

(3) 連携研究者

小林 隆夫 (KOBAYASHI TAKAO)
東京理科大学・理工学部数学科・教授
研究者番号 : 90178319
(連携期間 : 2009 年度 ~ 2011 年度)

田中 隆一 (TANAKA RYUICHI)
東京理科大学・理工学部数学科・教授
研究者番号 : 10112898
(連携期間 : 2009 年度 ~ 2011 年度)

八森 祥隆 (HACHIMORI YOSHITAKA)
東京理科大学・理工学部数学科・准教授
研究者番号 : 50433743
(連携期間 : 2009 年度 ~ 2011 年度)