様式Ｃ－１９

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年　５月　２４日現在

機関番号：３２６８９
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2009 ～ 2012
課題番号：21540030

研究課題名（和文）　岩澤理論を基軸とする非アーベル的数論の発展的研究

研究課題名（英文）　Study of non-abelian number theory based on Iwasawa theory

研究代表者
尾崎　学　（OZAKI　MANABU）
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号：80287961

研究成果の概要（和文）：本研究によって代数体の非アーベル拡大の数論に関連して以下のような新たな知見が得られた：（１）基本 Z_p-拡大上の馴分岐岩澤加群の Z_p-階数の公式（２）代数体のイデアル類群上の Weil ペアリングの類似物の基本性質（3）代数体の単数群のガロワコホモロジー群の同型類（4）代数体のデデキントゼータ函数の制限分岐拡大の Galois 群による特徴付け

研究成果の概要（英文）：In this research project, I have obtained results on (1) a formula describing Z_p-rank of tamely ramified Iwasawa modules of the basic Z_p-extension, (2) an analogy of Weil paring for ideal class groups of number fields, (3) the isomorphism classes of Galois cohomology groups of global unit groups, and (4) a characterization of the Dedekind zeta functions in terms of a family of the Galois groups of restricted ramified extensions.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2009 年度	800,000	240,000	1,040,000
2010 年度	800,000	240,000	1,040,000
2011 年度	800,000	240,000	1,040,000
2012 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総　計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：数論，代数体，岩澤理論，ガロワ群，非アーベル拡大

１．研究開始当初の背景

代数体の最大不分岐拡大，あるいは分岐を制限した最大拡大のガロワ群の構造を調べることは，多様体の幾何学に於ける基本群が果たす役割の重要性を鑑みれば分るように，数論に於いて非常に重要な研究課題である．これらのガロワ群の pro-p アーベル商（p は素数）は，類体論や岩澤理論によりかなりの深い理解がなされていると言えるが，その全体像の解明は甚だ困難であり，現在も様々な角度から研究がなされている．

報告者は従来の研究に於いて、代数体の非アーベル不分岐拡大を岩澤理論的な手法で研究する「非アーベル岩澤理論」を創始して展開し，様々な研究成果を得ている．Z_p-拡大体上の最大不分岐アーベル p-拡大,あるいは最 S-分岐アーベル p-拡大（S は素点の有限集合で``S-分岐''は S に含まれない素点は不分岐の意）のガロワ群は岩澤加群と呼ばれ，これ

が古典的な岩澤理論の主たる研究対象であった．非アーベル岩澤理論に於いては，アーベル商のみならず最大不分岐，最大 S-分岐 p-拡大のガロワ群そのものの構造を研究対象とする．
このような状況下で，本研究のような新たな視点からの非アーベル拡大の研究は，大きな期待をもって注目されている．

２．研究の目的
本研究は代数体の非アーベル拡大という数論において最も深遠な対象を，岩澤理論的な手法を基軸として新たな手法を開発することによって取り組み．そしてその性質を明らかにすることである．
具体的には，代数体の制限分岐 pro-p-拡大とデデキントゼータ函数，イデアル類群、単数群等の数論的対象の間の関係を解明する．

３．研究の方法
岩澤理論を始めとする代数体の数論のみならず，トポロジー、組み合わせ群論，超越数論等の様々な数学の分野の手法を活用して問題に取り組む． そのために，様々な研究集会に参加して多くの研究者と交流を図り，横断的に研究を進める．

４．研究成果
（１） 基本 Z_p-拡大上の馴分岐岩澤加群の Z_p-階数の公式

代数体ｋと素数ｐを含まない素数の有限集合Ｓに対して，ｋの円分的 Z_p-拡大上の最大 S-分岐アーベル p-拡大のガロワ群 X_S(k)の Z_p-階数 λ_S(k)をｋが有理数体Ｑの場合に完全に決定することに成功した．この結果は岩澤理論に於いて非常に基本的と思われる．Ｓが空集合の場合には Weber, Frtwaengler, 岩澤にまで遡る古典的な結果により λ_∅(Q)=0 が知られていた．またＳがｐを含むときも岩澤によって λ_S(Q)の値は知られていた．しかし，一般のＳに関してはこれまで不明であったが，岩澤理論が創始されて半世紀が経過してようやく明らかになった．
公式をｐが奇素数の場合を具体的に述べれば，λ_S(Q)はｌがＳに含まれる素数全体を亙るときの、ｌの上にあるＫの素点の個数 N(l)たちの和から，N(l)の最大値を引いた値と等しい. p=2 の場合には公式はもっと複雑になる：ＭをＳに含まれる mod 4 で１と合同な素数ｌについての N(l)の最大値とする。そして，ＬをＳに含まれる mod 4 で３と合同な素数ｌについての N(l)たちの内で，Ｍ以上のもの全体の和とする．このときλ_S(Q)はｌがＳに含まれる素数全体を亙るときの、ｌの上にあるＫの素点の個数 N(l)たちの和からＭとＬを引いた値に等しい．
これを用いて p=2、ｋが虚二次体の場合の λ_S(k)の公式も得られた。これは馴分岐版の木田の公式と見做すことができる．
証明の鍵は、p-進対数函数の値の線形独立性に関する Brumer の定理をある Kummer 拡大の生成元の p-進独立性の証明に適用することである。この超越数論の結果はアーベル体に対する Leopoldt 予想の証明でも使われた深い定理であり、これをうまく使えたことが公式の証明に繋がった。

（２）代数体のイデアル類群上の Weil ペアリングの類似物の基本性質

代数体のイデアル類群上に Weil ペアリングの類似物を定義して，その基本性質を明らかにした．
このペアリングは, 考えている代数体の最大不分岐メタアーベル拡大のガロワ群の群論的な構造によって完全に決定されることが報告者により判明しているので, 代数体の最大不分岐メタアーベル拡大のガロワ群の構造を研究する上で重要な役割を果たすものと考えられる。
しかし, このペアリングは Weil ペアリングとは異なり, 単数群の Galois cohomology 群に値をとるため, 扱いが難しい．報告者はこのペアリングに関していくつかの予想を提起しており, その一つに「このペアリングの像は(Weil ペアリングと同様に)巡回群であろう」というものがある．
この予想がいくつかの特別場合に肯定的に解決された．具体的に述べれば, 以下の条件が満たされれば, 代数体Ｋのイデアル類群上のペアリングの像は巡回群である：
各素数ｐについて,
(1) Ｋのイデアル類群のｐ部分が基本アーベルｐ群もしくは巡回群,
あるいは
(2) Ｋの最大不分岐 p-拡大がアーベル拡大,
のいずれかが成立する．
証明は不分岐アーベル拡大におけるイデアルの単項化に関する鈴木の定理と, 淡中の定理を組み合わせることでなされる。
この結果は特別な場合のみを扱ってはいるが、一般の場合に予想を証明する手掛かりが得られたものと考えられる．今後のこのペアリングに関する上記予想を証明するととおに，その応用，例えば円分 Z_p-拡大上の非アーベル不分岐拡大の分析などに研究がに進展することが期待される．

（３）代数体の単数群のガロワコホモロジー群の同型類問題

代数体のガロワ拡大 K/k における単数群のガロワコホモロジー群は基本的な数論的対象である．例えば K/k が不分岐拡大の場合，1,2 次元コホモロジーは其々K/k におけるイデアル類群の capitulation kernel と capitulation cokernel と同型になっている．
一方，代数体の不分岐ガロワ拡大における capitulation kernel がどのようなアーベル群になるかという問題は古典的な重要問題であり，これについては，Hilbert の定理 94 や Furtwaengler の単項化定理という古典的結果や，これらの一般化である鈴木の単項化定理が知られている．
これらの結果を踏えて，Gruenberg と Weiss は一連の論文で次のような問題を考察した：
「G を有限群とする．このとき代数体の不分岐 G-拡大に於ける capitulation kernel としてどのようなアーベル群が現れるか？　正確に言えば，K/k が代数体の不分岐 G-拡大全体を動くときの K/k における単数群の１次元コホモロジーの同型類全体のなす集合 $X_1(G)$ を決定せよ．」
Gruenberg と Weiss はこの問題の群論版については十分満足すべき解答を与えたが，元々の問題を解決するためには，与えられた群論的状況を実現する不分岐拡大の存在問題が解決されなければならない．
私は従前研究に於いてこの存在問題を G が有限 p-群の場合に解決しているので，この場合には Gruenberg と Weiss の結果と合わせて $X_1(G)$ を決定することができる．
さらに G が有限 p-群の場合に，K/k が代数体の不分岐 G-拡大全体を動くときの K/k における i 次元コホモロジー群の同型類全体のなす集合 $X_i(G)$ を i=0,2,4 の場合にも完全に決定することに成功した．この場合には exponent が G の位数であるような任意の有限アーベル群が単数群の i-次元ガロワコホモロジー群として現れる．
証明は，まず，類体論のクラスフォーメーションの理論と Shafarevich-Weil の定理を用いて，不分岐拡大 K/k における単数群のガロワコホモロジー群を，K の最大不分岐アーベル拡大 L についてのガロワ群 Gal(L/k) の群論的構造で完全に記述して，問題を群論に帰着させる．報告者によって与えられたガロワ群をもつ最大不分岐 p-拡大の存在が確定していることにより，任意の群論的状況が実際の代数体の不分岐拡大で実現されることが保障されているので，上述の群論の問題を解決すればよい．それによって，コホモロジーの次元 i が 2,4 のときはただちに解決される．i=0 の場合は更なる手法が必要となる．上述の不分岐 p-拡大の構成に，Shafarevich による可解群に対するガロワの逆問題と，中心拡大の理論を組み合わせる数論的手法で，上述群論の問題を解決するという一風変わった方法で i=0 の場合にも結論が得られる．

（４）代数体のデデキントゼータ函数の制限分岐拡大の Galois 群による特徴付け

２つの有限次代数体に付随するデデキントゼータ函数が一致するとき，その２つの代数体は算術的同値であると言われる．デデキントゼータ函数は，その代数体の数論的性質を深く反映しているが，それによって完全に代数体の同型類を特徴付けできる訳ではない．即ち，互いに算術的同値であるが同型でないような２つの有限次代数体が存在することが知られている．そこで，代数体の如何なる数論的性質がそのデデキントゼータ函数を特徴付けるか，という問題が大いに興味を惹くことになる．
この問題に対して，有限次代数体のある種の制限分岐拡大の族がデデキントゼータ函数を決定し，またその逆も然りであることを示すことに成功した．
この結果は「デデキントゼータ函数は代数体の制限分岐拡大のガロワ群の構造を知っている」という岩澤理論（主予想）に象徴される現代数論思想の一つの大きな流れの中に位置するものと看做すことができる．
証明は，チェボタレフ密度定理を用いて，代数体 k のデデキントゼータ函数の各素数上のオイラー因子が，k 上のある種の制限分岐拡大のガロワ群から復元できることを示すことによって行われる．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）
〔雑誌論文〕（計４件）

① Y.Mizusawa, M.Ozaki,
On tame pro-p Galois groups over basic Z_p-extensions,
Math.Z., 査読あり, 273 (2013), 1161-1173.
DOI:10.1007/s00209-012-1048-2

② Y.Mizusawa, T.Itoh, M.Ozaki,
the Z_p-ranks of Tamely Ramified Iwasawa Modules,
Int. J.Number Theory, 査読あり, 掲載決定

③ M.Tohkailin, M.Ozaki,
Characterization of arithmetical equivalence of number fields by Galois groups with restricted ramification,
Tokyo J. Math., 査読あり, 掲載決定

④ M. Ozaki,
Construction of maximal unramified p-extensions with prescribed Galois groups,
Invent. Math., 査読あり, 183 (2011), 649-680.
DOI :10.1007/s00222-010-0289-0

〔学会発表〕(計 4 件)

① 尾﨑学,
On the abelian groups which occur as Galois cohomology groups of global unit groups, Number theory forlum,
2013 年 3 月 25 日, 慶應義塾大学

② 東海林満,
ある種の無限次代数体の絶対 Galois 群を用いた特徴付け,
2012 年度日本数学会秋季総合分科会,
2012 年 9 月 18 日, 九州大学

③ 水澤 靖,
馴分岐岩澤加群の Z_p-階数について,
代数的整数論とその周辺, 2010 年 12 月 9 日, 数理解析研究所

④ 伊藤剛司,
基本 Z_p-拡大の馴分岐岩澤加群について,
2010 年日本数学会秋季総合分科会, 2010 年 9 月 25, 名古屋大学

６．研究組織

(1)研究代表者
尾﨑学 (OZAKI MANABU)
早稲田大学理工学術院教授
研究者番号：80287961

(2)研究協力者
水澤靖 (MIZUSAWA YASUSHI)
名古屋工業大学准教授
研究者番号：60453817

伊藤剛司 (ITOH TSUYOSHI)
千葉工業大学講師

東海林満 (TOHKAILIN MITSUL)
大阪工業大学非常勤講師

藤井俊 (FUJII SATOSHI)
金沢工業大学講師
研究者番号：20386618

岡野恵司 (KEIJI OKANO)
都留文科大学講師

Christian Maire
Universite de Franche-Comte 教授

Abbas Chazad Movahhedi
Universite de Limoges 教授

Bruno Angles
Universite de Caen 教授