様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２４　年５　月２５　日現在

機関番号：１２７０１
研究種目：基盤研究（Ｃ）
研究期間：　2009～2011
課題番号：21540032
研究課題名（和文）　対数構造を用いた退化多様体のピカール多様体の幾何学

研究課題名（英文）　Geometry of Picard varieties of degenerate varieties via log structures

研究代表者
梶原 健（KAJIWARA TAKESHI）
横浜国立大学・工学研究院・准教授
研究者番号：00250663

研究成果の概要（和文）：本研究課題では、対数アーベル多様体の研究、およびその応用、また多様体の変形に関係した付値環の構造の研究を実施した。得られた成果は主に次のとおりである。まず、代数的対数アーベル多様体の構造を利用して、対数ピカール多様体の定式化を与えた。また対数アーベル多様体と退化多様体の接点である対数楕円曲線について、そのモジュライ空間を構成した。これは加藤和也氏、中山能力氏との共同研究である。他に、完備扇に対応する対数アーベル多様体のモデルが、完備であることを証明した。

研究成果の概要（英文）：Our research studies log abelian varieties, and their applications, and also structures of valuation rings. We mainly show the following results. First, we give a formulation of logarithmic Picard varieties of degenerate varieties, by using the structures of logarithmic abelian varieties. Next, we construct the moduli spaces of logarithmic elliptic curves. This is a joint work with Kazuya Kato, and Chikara Nakayama. Finally, we prove properness of models of logarithmic abelian varieties associated to complete fans.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００９年度	1,000,000	300,000	1,300,000
２０１０年度	900,000	270,000	1,170,000
２０１１年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総　計	2,700,000	810,000	3,510,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：代数幾何

１．研究開始当初の背景

この研究は、半安定曲線の一般ヤコビ多様体のコンパクト化の問題から始まった。研究代表者は、高々結節点しかもたない曲線の対数ヤコビ多様体から、一般ヤコビ多様体の(自然な)コンパクト化を構成した。

一般ヤコビ多様体のコンパクト化の研究は、1950 年代の井草準一氏の研究(完備既約結節曲線に退化する族の場合)に始まり、その

後、マンフォード、メイヤー、小田・セシャドリ両氏、石田正典氏など、多くの数学者が貢献している。近年では、カポラソ、シンプソン、エステベス、アレクセーフ氏の研究により、めざましい進展をとげた。

これまでに申請者は、小田・セシャドリ氏が扱う場合に、上述の対数構造の観点から、一般ヤコビ多様体のコンパクト化の構成し、この２つのコンパクト化の比較、つまり、対数構造と（従来から退化直線束として）捻れのない階数１の連接層との比較を行っている。

一方，加藤和也（シカゴ大学、USA）、中山能力氏（東京工業大学）との共同研究により。対数アーベル多様体論が始められた。複素解析的な場合は対数ホッジ理論の観点から基礎づけができた。また、代数的な理論については、２００８年に Nagoya Math. J.において理論的定式化を発表した。現在、ひきつづき、この理論の完成に向けた研究が進行中である。

対数ピカール多様体について、複素解析的な場合では、対数アーベル多様体と同様に対数ホッジ構造を利用した基礎づけを確立し、Nagoya Math. J.で発表した。

本研究の意義を一般ヤコビ多様体のコンパクト化の問題に関連して述べる。従来、退化多様体の一般ヤコビ多様体のコンパクト化は、ねじれのない階数１の連接層のモジュライ空間として考察されていたため、一般ヤコビ多様体のようなコホモロジー論的な解釈が困難であった。

またコンパクト化は、ある種のパラメータをもち、多くの場合一意的ではなかった。しかし、対数構造付きで考える場合では、対数構造付きヤコビ多様体は一般ヤコビ多様体のコンパクト化を与えるだけでなく、１次のコホモロジー群の部分集合を表現し、新しいコホモロジー論的解釈を得る。さらに、対数ヤコビ多様体自身は、従来の結果と同様に１次コホモロジー群を（代数対数空間（代数空間の一般化）として）表現するので、自然に群構造をもち、一意的に定まる。これらは対数構造の観点から研究することによって、初めて得られる知見であり、対数ヤコビ多様体の理論のすぐれた成果である。さらに対数ピカール多様体（対数ヤコビ多様体はその連結成分）まで考えることで、退化多様体のネロン-セベリ群などの幾何にも応用が期待される。

２．研究の目的

本研究の目的は、退化多様体に（フォンテーヌ-イリュージー-加藤の意味の）対数構造を付加して得られる、対数的に滑らかな完備代数多様体に対して、その一般ヤコビ多様体のコンパクト化の構成、および対数ピカール多様体の構成とその幾何学の研究である。

また、対数ピカール多様体から、対数ヤコビ多様体を自然に構成し、トレリ問題などの一般ヤコビ多様体のコンパクト化への応用を目指す。

退化多様体のヤコビ多様体のコンパクト化の研究の長い歴史のなかで、そのコンパクト化の極限やその群構造を考察するのは、本研究の特長である。また、直線束の退化を比較して、ねじれのない階数１の連接層を、対数構造から定義されるコホモロジー群で解釈できると予想される。このような解釈は対数構造の方法の有効性を示唆している。さらに本研究の成果から、対数構造を用いた、コンパクト化の問題を越えた、新しい群多様体の理論が予見される。

また，本研究は，上で紹介した対数アーベル多様体論（例えば、対数構造を用いた、アーベル多様体のモジュライ空間のコンパクト化を目指した研究（加藤和也氏、中山能力氏との共同研究））とも密接に関係していることを注意する。

３．研究の方法

主に下記の方法で研究を実施した。

（１）複素解析的な場合に、対数アーベル多様体と対数ピカール多様体に関する研究（加藤和也氏、中山能力氏との共同研究）がある。両者の関係や、代数的対数アーベル多様体の定式化を参考にした。この定式化では、退化に関連して登場する２つの有限生成自由がーベル群の層とそれらの間の対合が重要である。これらをもとに代数的対数ピカール多様体の定式化を研究した。

（２）ドリーニュ・ラポポルトの楕円曲線のモジュライ空間のコンパクト化に対して、自然な対数構造を定義し、対数楕円曲線の普遍族を構成する。対数楕円曲線の構成はすでに得られているので、この方法を普遍族の場合まで拡張する。

（３）代数空間の付値論的判定法を用いて、完備扇に付随する対数アーベル多様体のモデルが完備であることを証明する。代数空間に対する完備性の判定法（付値論的判定法）は園プロジェクトを参考にする。

（４）付値環は離散付値環でない限り、ネーター環ではない。そのため、ネーター環に関する有限性を利用した、多くの議論がそのま

までは適用できない。そこで、付値環のネーターな部分環をうまく利用して、ネーター環の有限性にイデアルの生成元の計算を帰着する。

４．研究成果

得られた研究成果をまとめると、主に以下の４点になる。

（１）代数的対数アーベル多様体の構造を利用して、対数ピカール多様体の定式化を与えた。この定式化は Lutkebohmert らの剛解析的なピカール多様体（ただし半安定アーベル多様体になる場合）を参考にして、従来のピカール多様体が半安定アーベル多様体であるような場合について考察した。

具体的に説明する。対数アーベル多様体は、大雑把に言うと、アーベル多様体とその退化を統制する有限生成自由アーベル群の２つの層、およびそれらの間の対合で記述される。対数アーベル多様体を定義するこれらの対象を退化多様体から導くために、底空間の対数構造の引き戻しの群化を利用した。

アーベル群の間の対合は、対数アーベル多様体を定めるためには許容的でなければいけない。この条件は退化族を扱う上で、重要な条件である。退化多様体からくる対合は、コホモロジー群のカップ積からくるが、この対合が許容的であるための条件を決定することが今後の課題である。

（２）対数楕円曲線のモジュライ空間を構成した。これは加藤和也氏（シカゴ大学、USA）、中山能力氏（東京工業大学）との共同研究である。対数楕円曲線は、１次元対数アーベル多様体であり、大雑把に言うと、楕円曲線であるか、または、（従来退化している対象については）退化楕円曲線の自然な合併である。

合併について説明する。テイト曲線の規約成分は等分点の構造を関係してさまざまである。これらの曲線はブローアップやブローダウンでつながる。

一方、対数概型の圏では、ブローアップやブローダウンは、対数概型の表現する関手の間の包含射を誘導する。したがって、この包含射により、対数構造つきテイト曲線たちの合併が、対数概型の圏において自然に得られる。この合併が対数楕円曲線の例である。

このような対象を考えることにより、従来の理論では不可能であった群構造を（退化多様体にまで）考えることが可能となる。本研究の１つの成果は、この一般化された対象のモジュライ空間を構成できたことである。ここで構成したモジュライ空間の特長として、従来、ドリーニュ・ラポポルトのコンパクト化にはない性質を、対数楕円曲線の普遍族が持つことである。

例えば、１つの楕円曲線の普遍族に対して、さまざまなレベル構造を定義することができる。（従来は退化ファイバーの形により、レベル構造は強い制限を受けていた。）

（３）完備扇に対応する対数アーベル多様体のモデルが、完備であることを証明した。まず、対数アーベル多様体は、（２）で対数楕円曲線の場合に説明したように、従来の多様体の概念を拡張した群対象である。

従来、研究されていた退化アーベル多様体では、完備性を課すと、特異点において群構造が原理的に定義できない。一方、完備性を課さずに群構造を優先し、非特異群多様体を考えると、（開多様体の）変形理論やモジュライ空間など扱いが難しくなる。そのため、従来の研究では、群構造を部分的に利用した完備多様体を扱う。したがって、本研究で考える群対象が、研究成果で得られたように、ある種の完備性を持つことは理論上重要である。

しかしながら、対数アーベル多様体自身は、従来の多様体の範疇にはおさまらない。そこで、この方面の研究を進めるにあたり、代数多様体である退化多様体に関する先行研究の成果を利用する方法があるとよい。その１つの方法として、この群対象を十分にとらえることができる代数多様体（従来、（モジュライ空間のコンパクト化のために）退化アーベル多様体として研究されてきたものを含む）を補助的に扱う。これが対数アーベル多様体のモデルのアイデアである。

モデルの完備性については、退化アーベル多様体の研究でも、完備な多様体として構成することが重要であった。

以上の状況を考慮し、本研究では、完備扇に伴う対数アーベル多様体のモデルが、完備になることを証明した。この成果は、対数アーベル多様体に関しても、従来からある退化アーベル多様体の研究を利用するための基礎付けである。

（４）付値環は、離散付値環でない限り、ネーター環ではない。そのため、イデアルの生成元の有限性など、アルゴリズムの有限終結性に関する重要な事実がそのままでは利用できない。

本研究では、付値環の剰余体を近似するような、付値環のよいネーター部分環を定式化し、その存在を証明した。この部分環を利用すると、付値体を係数とする多項式環のイデアルから、付値環を係数とする多項式環の有限生成なイデアルを有限の手続きで明示的に構成できる。この補題は、付値体上の多様体が剰余環上でどのように退化するのかを

研究する際に、有効な計算アルゴリズムを与えると期待される。
　本研究のアプローチは、付値体上の代数多様体の退化の研究に関連して、トロピカル多様体の定義イデアルのトロピカル基底にも関係がある。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　１件）

① Takeshi Kajiwara, Kazuya Kato, and Chikara Nakayama, Logarithmic abelian varieties, Part III: Logarithmic elliptic curves and modular curves, Nagoya Mathematical Journal, 査読有, accepted.

〔学会発表〕（計　１件）

① 梶原健、Logarithmic abelian varieties, Hodge 理論と代数幾何学、2009 年 6 月 30 日、京都大学数理解析研究所

６．研究組織
(1)研究代表者
　梶原　健（KAJIWARA TAKESHI）
　横浜国立大学・工学研究院・准教授
　研究者番号：00250663

(2)研究分担者
　　　　　　（　　）

　研究者番号：

(3)連携研究者

　研究者番号：