様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２４年５月１８日現在

機関番号：１３４０１
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2009～2011
課題番号：21540034
研究課題名（和文）　ファイブレーションを軸としたアフィン代数幾何学の可換環論的研究

研究課題名（英文）　Commutative algebraic approach to the study of affine algebraic geometry focused on fibrations

研究代表者
小野田　信春（ONODA NOBUHARU）
福井大学・大学院工学研究科・教授
研究者番号：40169347

研究成果の概要（和文）：可換環論およびアフィン代数幾何学の双方において重要な対象であるアフィンファイブレーションに関して研究を行い、いくつかの重要な結果を得た。特に、多項式環を貼り合わせて得られる環について、基礎となる環が２次元素元分解整域の場合に、その構造定理を証明するとともに、同型類も完全に決定した。さらに、多項式環のネーター部分環の有限生成性についても考察した。

研究成果の概要（英文）：Some results are obtained regarding affine fibration which is an important subject both in commutative algebra and affine algebraic geometry. In particular, for an algebra obtained by patching polynomial algebras, the structure theorem is proved and isomorphism classes are determined in the case where the base ring is a factorial domain of dimension two. Furthermore, finite generation is investigated for Noetherian subalgebras of polynomial algebras.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００９年度	1,200,000	360,000	1,560,000
２０１０年度	900,000	270,000	1,170,000
２０１１年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総　計	3,000,000	900,000	3,900,000

研究分野：可換代数学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：可換環論、アフィン代数幾何学

１．研究開始当初の背景

(1)　可換ネーター環 R と R-代数 A が与えられたとき、R の素イデアル P に対し、A_P/PA_P を P 上 A のファイバー環という。ファイバー環は A の R-代数としての構造を反映するが、逆に R の各素イデアル P に対し、P 上 A のファイバー環の構造が与えられたとき、そこから A の構造についてどういうことが導けるであろうか。これは、アフィン代数幾何学とも強く関連する、可換環論における興味ある問題の一つである。この問題で、もっとも基本的なのは、各ファイバーが基礎体 k(P) 上の n 変数多項式環になる場合、すなわち、

(*)　$A_P/PA_P = k(P)^{[n]}$

となる場合である。ただし、k(P) は R/P の商体を表し、$B^{[n]}$ は環 B 上の n 変数多項式環を表す。この条件を満たすとき、A は R 上の $\mathbb{A}^n$-fibration と呼ばれる。$\mathbb{A}^n$-fibration の構造に関する研究が始まったのは 1970 年代後半からであるが、もともとは deformation

に関連するアフィン代数幾何学的な問題意識が出発点である。その後、1980 年代後半に浅沼照雄らの貢献で、$\boldsymbol{A}^n$-fibration の構造と性質に関する研究がかなり進展した。

(2)　1980 年代の研究の後、可換環論の立場からの最初に重要な貢献は、Bhatwadekar と Dutta の共同研究である。彼らは n=1 として、ファイバー条件(*)が高さ 1 以下のすべての素イデアル P について成り立つような A を codimension-one $\boldsymbol{A}^1$-fibration と呼び、それについて考察した。そして、R はネーター正規局所環で A は R 上忠実平坦という仮定の下で、A が R 上の多項式環の部分環のとき、または、A が R 上有限生成のとき、codimension-one $\boldsymbol{A}^1$-fibration は R 上 1 変数多項式環になることを示した。その後、報告者は Dutta との共同研究で、この定理を一般化すると共に、R が一意分解整域のとき、忠実平坦な codimension-one $\boldsymbol{A}^1$-fibration の構造を決定することに成功した。さらに、報告者は、Bhatwadekar, Dutta との共同研究により、R がネーター整閉整域の場合に定理を一般化し、codimension-one $\boldsymbol{A}^1$-fibration はある種の次数付き環のなす直系の直極限として得られる、ということを証明し、それまでに得られた定理が、全てこの結果から導けることを示した。

２．研究の目的

(1) 以上の背景を踏まえ、本研究では以下の目的を設定した。

1. ネーター正規環 R 上の codimension-one $\boldsymbol{A}^*$-fibration の構造を明らかにせよ。

2. ネーター正規環 R 上の codimension-one $\boldsymbol{A}^2$-fibration の構造を明らかにせよ。

(2) さらに、deformation との関連で、次の 2 つの問題も設定した。

3. 離散付値環 R の商体を K、剰余体を k とする。平坦 R-代数 A について、A の R 上の生成ファイバーの構造が与えられているとき、A の R 上の特殊ファーバーの構造を求めよ。

4. 体 K の付値環（V,P）と K 上の代数関数体 L の付値環（V_1,P_1）で $V_1 \cap K = V$ を満たすものについて、剰余体 V_1/P_1 の V/P 上の代数関数体としての構造を明らかにせよ。

以上が本研究で設定した目的であるが、ファイブレーションを軸に、アフィン代数幾何学に関連する問題を可換環論的に考察するのが狙いである。

３．研究の方法

(1)　まず、本研究には、海外共同研究者として、Bhatwadekar 教授（Bhaskaracharya Pratishthana、インド）と Dutta 教授（Indian Statistical Institute、インド）に加わっていただく。

(2)　今回の研究は過去の研究の発展であり、関連するいくつかの結果を得ているので、それらを利用すると共に、その際に行った考察を深化させることで解決を目指す。そのための具体的な方法は次のとおりである。

・国内外の各地の研究者と随時研究連絡、討論、打合せ等を行う。

・海外共同研究者とは、普段は e-mail 等により情報交換を行うが、年に一度、海外共同研究者のもとに出張して直接討論する。

・コンピュータを利用して、計算の効率化を図る。

・研究成果の複写を各地に送り、情報交換を行う。

・各種シンポジウム、セミナー等に出席し、研究経過及び成果を発表する。

４．研究成果

(1)　まず、$\boldsymbol{A}^1$-patchについて説明する。これは、研究目的で設定した問題を考察する過程で導入したもので、目的を達する上で、極めて重要な役割を果たすものと期待できる。

以下、R はネーター整閉整域とし、A は R 上の codimension-one $\boldsymbol{A}^1$-fibration とする。A が R 上有限生成な環の部分環である場合を考える。すると、A の R 上の生成ファイバーが R の商体 K 上の 1 変数多項式環であることから、$A_x = R_x^{[1]}$ をみたすR の元 x が存在することが導ける。ただし、ここで、$A_x = A[1/x]$ である。また、S を R から xR に付随する素イデアルの合併集合を除いた積閉集合とすると、$S^{-1}R$ がデデキント準局所環ということから、$S^{-1}A = (S^{-1}R)^{[1]}$となり、従って、$A_y = R_y^{[1]}$ を満たす S の元 y が存在することが分かる。このとき、x, y はR の正則列であり、従って、$R = R_x \cap R_y$ が成り立つことに注意する。さらに、x, y が A-正則列でもあると仮定しよう。この仮定は、A が R 上平坦な場合、または、R 上の多項式環の inert subring の場合には成立する。x, y が A-正則列なら$A = A_x \cap A_y$ が成り立つ。つまり、A に関して、以下の 3 条件が満たされる。

(イ)　$R = R_x \cap R_y$
(ロ)　$A_x = R_x^{[1]}$,　$A_y = R_y^{[1]}$
(ハ)　$A = A_x \cap A_y$

一般に、上記の 3 条件が満たされるとき、A は R 上 x, y に関する $\boldsymbol{A}^1$-patch である、という。このとき、A はR 上のcodimension-one

$\boldsymbol{A}^1$-fibration であり、さらに上の考察から、A が R 上平坦な場合は逆も成り立つことが分かるが、平坦性を外すと、逆は一般に成立しない。

(2)　$\boldsymbol{A}^1$-patch は、ヒルベルトの第 14 問題とも密接に関連する。そのことを具体例で示す。

B = K[x, y, u, v, w] を標数 0 の体 K 上の5変数多項式環とし、δ : B → B を

$\delta x = \delta y = 0, \ \delta u = x^2$

$\delta v = xu + y, \ \delta w = v$

で定義される局所冪零導分とする。この導分δの核をA とすれば、A は R 上有限生成ではない（Daigle, Freudenburg によるヒルベルト14問題の反例、1999年）。いま、

$f = xu^2/2 + yu - x^2v$

とおき、R = K[x, y, f] とすれば、R は K 上 3 変数多項式環である。実は、このとき、A は R 上 x, y に関する $\boldsymbol{A}^1$-patch であることが示せる。この事実は、本例に限ったことではなく、同様の考察が、他のヒルベルト14 問題の反例に対しても行える。

(3)　$\boldsymbol{A}^1$-patch の構造、とくに有限生成性について調べることは、アフィンファイブレーションのみならず、ヒルベルト14 問題の関連からも重要である。そこで、本研究では、目的遂行に向けての考察の過程で導入したこの $\boldsymbol{A}^1$-patch を重要な対象と位置づけ、中心的に研究を行った。

以下、R はネーター整閉整域、x, y はR の正則列、A は R 上 x, y に関する $\boldsymbol{A}^1$-patch とする。

研究対象として最も基本的なのは、R が体上 n 変数多項式環で、x, y がその変数の一部となっているときである。この場合は、上で見たように、多項式環上に作用する局所冪零導分の定数環の有限生成性と密接な関連があり、その観点からは n が 3 以上の場合が重要になるが、手始めとして n = 2 の場合を研究した。この場合については、後に示すように完全な結果が得られた。

主定理を述べる前に、一般的な結果をいくつか示しておく。

補題 1　A が R 上忠実平坦なら、R の可逆イデアル I が存在して、A は R 上 I に関するRees 環（I の対称代数）になる。特に、x, y が R の極大イデアルを生成するなら、A は R 上の Rees 環である。

系　dim R = 1 なら、A は R 上の Rees 環である。

n, m は非負整数、z を R の元として、

$$C = R[U,V]/(x^nU + y^mV + z) \qquad (*)$$

とする。このとき、$A = C_x \cap C_y$ とおくと、A は R 上 x, y に関する $\boldsymbol{A}^1$-patch である。R が UFD の場合はこの逆も成り立って、次が成立する。

補題 2　R が UFD なら、(*) で定義される環と同型な R の部分環 C = R[u,v] が存在して、$A = C_x \cap C_y$ が成り立つ。

A が R 上の多項式環になるための条件として次がある。

定理 3　R は UFD とする。このとき、$A = R^{[1]}$ となるための必要十分条件は、$(x,y)A \cap R = (x,y)R$ が成立することである。

系　定理3 と同じ仮定の下で、以下の条件は互いに同値である。

（i）$A = R^{[1]}$

（ii）A は R 上忠実平坦である。

（iii）A から R への retraction φ : A → R が存在する。

定理3 に関連して、以下の例を挙げておく。

例 1　$R = \mathbb{R}[X,Y,Z]/(X^2 + Y^2 + Z^2 - 1)$ とし、

$$C = R[U,V]/(yU - xV + z - 1), \quad A = C_x \cap C_y$$

とおく。ただし、ここで、x, y, z は R における X, Y, Z の像である。このとき、A は R 上 x, y に関する $\boldsymbol{A}^1$-patch である。いま、

$$t = ((z + 1)u - y)/x = ((z + 1)v + x)/y$$

とおくと、A = R[x,y,t] が成り立つ。A は R 上平坦な正則環であるが、R 上の多項式環ではない。

次の定理は本研究による主結果のひとつであり、R が 2 次元 UFD の場合に $\boldsymbol{A}^1$-patch の構造を与える構造定理である。

定理 4　R は UFD とする。(x,y)R が R の極大イデアルのとき、A が R 上 x, y に関する $\boldsymbol{A}^1$-patch なら、A の構造に関して、次の 3 つの場合のいずれかが成り立つ。

(ｲ) A = R[U]

(ﾛ) $A = R[U,V]/(y^nU - x^mV - f)$

ここに、m, n は自然数で、f は (x,y,f)R = R をみたす R の元である。

(ﾊ) $A = R[U,V,T]/(yT - x^mV - f, x^pT - y^nU - g)$

ここに、m,n,p は自然数で、f,g は R の元であり、(x,y,f)R=R をみたし、g は $(x^p,y^n)R$ に属さない。

さらに、これら3つの場合は互いに排他的である。すなわち、この3つのうち、ただ1つの場合のみが起こる。

系　R は2 次元正則環とする。このとき、A は R 上平坦かつ有限生成な正則環である。

定理 4 に関連して、A の同型類の決定も行った。上の構造定理の(ロ)のタイプのR−代数を C(n,m;c) で表し、(ハ)のタイプのR−代数をE(m,n,p;r,s) で表すことにするとき、次の定理が成り立つ。

定理 5　以下の結果が成立する。
(i) C(n,m;c) と $C(n_1,m_1,c_1)$ が同型となるための必要十分条件は、$(n,m) = (n_1,m_1)$ でありかつ$c_1 - \lambda c$ が $(x^m,y^n)R$ に属するように R の元λが選べることである。
(ii) E(m,n,p;r,s) と $E(m_1,n_1,p_1;r_1,s_1)$ が同型となるための必要十分条件は、$(m,n,p) = (m_1,n_1,p_1)$ であり、かつ

$$x^p(r_1 - \lambda r) - y(s_1 - \lambda s)$$

が $(x^{m+p}, y^{n+1})R$ に属するように R の元λが選べることである。

(4) R が2次元 UFD の場合は、Aの構造が完全に決定でき、結果的に A は常に有限生成となったが、次の例が示すように、UFD の仮定を落とすとこの定理は一般的には成立しない。

例 2　$R=\mathbf{C}[U,V,W]/(V^2W - U^3 + UW^2)$ とする。ただし、**C** は複素数体である。高さ1の素イデアル P を、P の記号的 n 乗 $P^{(n)}$ が任意の n に対して単項とならないように選ぶ。このとき、A を P による記号的 Rees 環とすれば、R の正則列 x, y が存在して、A は R 上 x, y による $\boldsymbol{A}^1$-patch になるが、A は R 上有限生成ではない。

$\boldsymbol{A}^1$-patch A の有限生成性については、次が成り立つ。

定理 6　A が R 上平坦なら、A は R 上有限生成である。

この定理により、平坦性は有限生成性の必要条件であるが、次の例が示すように、逆は一般に成り立たない。

例 3　$R = \mathbf{C}[x,y,z]/(XY - Z^2)$, P=(y,z)R とおき、A を R 上 P に関する記号的 Rees 環とする。このとき、A は R 上 x, y に関する $\boldsymbol{A}^1$-patch である。さらに、P は単項イデアルでないため、A は R 上平坦ではない。しかし、$P^{(2)} = yR$ より、A は R 上有限生成である。

平坦性と有限生成性が同値となる場合として、定理4 の系から、R が 2 次元正則環の場合があるが、それを一般化して、次の重要な結果を得ることができた。

定理 7　R は体 k 上の 2 次元正規アフィン整域で、A は R 上の $\boldsymbol{A}^1$-patch とする。このとき、R を含み、R 上有限加群であるような正則整域 S が存在するなら、A は R 上平坦かつ有限生成である。

この定理の条件、即ち正則整域 S の存在は k が標数零の代数閉体で R が k 上2次元商特異点なら満たされる。従って、定理の系として次を得る。

定理 8　R が 2 次元商特異点のとき、A は R 上有限生成である。

例 4　$R = \mathbf{C}[X,Y,Z]/(X^5 + Y^3 + Z^2)$ とすると、R は 2 次元商特異点である。従って、**C** を (*) で定義される環として、$A = C_x \cap C_y$ とおくと、A は R 上有限生成である。

この例 4 では、 R は UFD ではあるが、(x,y)R が R の極大イデアルではないため、定理4は適用できない。

定理 7 において、正則整域 S の存在を仮定しない場合が問題になるが、これに関連して、次の結果を得た。

補題 9　p, q, r を正の整数として、
$R = \mathbf{C}[X, Y, Z]/(X^p + Y^q + Z^r)$,
$C = R[U,V]/(xU + yV + z)$
とおき、$A = C_x \cap C_y$ とする。このとき、A が R 上平坦なら、$r(p+q) > pq$ が成り立つ。

実際には、この補題の逆も成立するであろう、と予想しているが、完全な証明は完成していない。

(5)　以上が、$\boldsymbol{A}^1$-patch に関する主な研究成果であるが、この研究と平行して、目的に設定した問題4と5に関して、ネーター正規環 R 上の1変数多項式環 R[X] のネーター部分環 A の有限生成性についての研究を行った。R が1次元の場合については以前の研究成果があるので、R が2次元の場合を中心に考察

した。まず、2 次元に限らず、一般次元で成り立つ結果として、次を得た。

定理 10　R は優秀正規環（excellent normal domain）とし、また、A は R を含む正規環とする。さらに、u は A の非零元で、以下の 3条件を満たすとする。
(ｲ) $A[1/u]$ は R 上有限生成である。
(ﾛ) A/uA は R 上有限生成である。
(ﾊ) u の任意の極小素イデアル P に対し、$\mathrm{ht}(P) = 1$ であり、P は R に関して次元公式を満たす。
　このとき、A　は R 上有限生成である。

R が体の場合、上の結果は過去に証明して論文として発表済みであるが、これはその一般化であり、有限生成性を考察する上で極めて重要な定理である。この定理を応用して、次の定理が示せた。

定理 11　R は剰余体が代数的閉体であるような 2 次元完備局所環とし、u, v は R の正則パラメーターとする。また、A は R を含み、R 上の超越次元が 1 であるようなネーター正規環とし、さらに $A[1/u]$ は R 上有限生成とする。このとき、uA の任意の極小素イデアル P に対して $P \cap R = uR$ が成り立ち、A/P が R/uR 上超越的ならば、A は R 上有限生成である。

この定理の最後の仮定が成り立たない場合、即ち、A/P が R/uR 上代数的となるような極小素イデアル P が存在する場合、この定理は一般的には成立しない。そのような例を構成する一般的方法についても考察し、そこで得られた結果を用いて、具体例を複素数体 C 上の 2 変数形式的冪級数環 $\mathbf{C}[[u,v]]$ 上で構成できた。

例 5　$R = \mathbf{C}[[u,v]]$ とする。p_n を第 n 番目の素数として、v の p_n 乗根を $\mathbf{C}((v))$ にすべて添加して得られる $\mathbf{C}((v))$ の代数拡大体を L とする。X を不定元として、$x_0 = uX$, $x_1 = (vx_0 - 1)/u$ とおき、
　$x_2 = (x_1^2 - v)/u$,　$x_3 = (x_2^3 - v)/u$, …
により、$x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ を定めて、
　$D = R[x_0,x_1,\ldots,x_n,\ldots]$,　$A = D \cap R[X]$
とする。このとき、以下が成り立つ。
(ｲ)　$D[1/u] = R[1/u][X]$
(ﾛ)　uD は高さ 1 の D の素イデアルである。
(ﾊ)　D/uD と L は同型である。
(ﾆ)　D はネーターUFD で、R 上有限生成ではない。
(ﾎ)　A はネーター正規環で、R 上有限生成ではない。

定理 11 に関連して、次の結果も示せた。

定理 12　R は $p = (u,v)R$ を極大イデアルにもつ 2 次元正則局所環で、$k = R/p$ とする。また、D は R を含む整域で、次の条件を満たすとする。
(i)　u は D の素元で、$uD \cap R = uR$ かつ $D[1/u] = R[1/u]^{[1]}$ が成り立つ。
(ii)　D/pD は整域で、k 上超越的である。
このとき、以下が成り立つ。
(ｲ)　R が優秀環なら、D は R 上有限生成である。さらに、k の有限次拡大 F が存在して、$D/pD = F^{[1]}$ となる。
(ﾛ)　k が代数的閉体なら、$D = R^{[1]}$ が成り立つ。

これらの定理に関連して、上に挙げた例 5 以外にもさまざまな例を構成することができたが、ここでは詳細は省略する。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）

① H. Kawai and N. Onoda, Commutative group algebras whose quotient rings by nilradical are generated by idempotents, Rocky Mountain J. Math., Vol. 41, 229-238, 2011. 査読有
② S. M. Bhatwadekar, A. K. Dutta and N. Onoda, On algebras which are locally $\mathbb{A}^1$ in codimension-one, Trans. Amer. Math. Soc., in press.　査読有

〔学会発表〕（計３件）

① N. Onoda, Some results on polynomial fibrations over two-dimensional normal domains, 第 8 回アフィン代数幾何学研究集会、2011 年 9 月 2 日、関西学院大学大阪梅田キャンパス
② N. Onoda, Some patching results on algebras over two-dimensional factorial domains, 第 6 回アフィン代数幾何学研究集会、2010 年 9 月 5 日、関西学院大学大阪梅田キャンパス
③ N. Onoda, Some remarks on $\mathbb{A}^1$-fibrations in codimension-one, 第 4 回アフィン代数幾何学研究集会、2009 年 9 月 3 日、関西学院大学大阪梅田キャンパス

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
http://apphy.u-fukui.ac.jp/mqs/math/onoda.html

６．研究組織
(1)研究代表者
小野田　信春（ONODA NOBUHARU）
福井大学・大学院工学研究科・教授
研究者番号：40169347

(2)研究分担者
（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
（　　）

研究者番号：

(4)研究協力者
S. M. Bhatwadekar
Bhaskaracharya Pratishthana・教授
インド
A. K. Dutta
Indian Statistical Institute・教授
インド