様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２５年５月１日現在

機関番号：13601

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2012

課題番号：21540035

研究課題名（和文）　ホモロジー的有限性を持つフィルターネータ環の研究

研究課題名（英文）　Filtered noetherian rings having homological finiteness

研究代表者

西田　憲司（NISHIDA KENJI）

信州大学・理学部・教授

研究者番号：70125392

研究成果の概要（和文）：フィルター擬コムパクト多元環の位相をフィルターから引き起こされたもので定義することにより、フィルター擬コムパクト多元環の定義を代数化した。即ち、極大イデアルにより引き起こされるフィルターを考えると、フィルター擬コムパクト多元環がネータ的かつ半完全環になる。ネータ的半完全環上の有限生成加群のなす圏はその加群が射影被覆を持つという大変良い性質を持つ、更にこれは近似理論とも関係する。従って、非可換ネータ多元環の表現の研究に応用が期待される。

研究成果の概要（英文）：We define the topology of a filtered pseudo-compact algebra induced from a filter of a ring. Then we can use algebraic method to study a filtered pseudo-compact algebra. By defining toplogy of filtered pseudo compact algebra induced from the filter, we give filtered pseudo compact algebra pury algebraic definition of filtered pseudo compact algebra. That is, suppose that the filter is induced from the maximum idal then filtered pseudo compact algebra is noetherian and semiperfect. The category of all finitely generated modules over noetherian semiperfect ring has good property, i.e. all the modules in it has a projective cover. This fact is highly connected to approximation theory. Hence filtered pseudo compact algebra is expected to the representation theory of non-commutative noetherian algebras.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2009 年度	700,000	210,000	910,000
2010 年度	700,000	210,000	910,000
2011 年度	700,000	210,000	910,000
2012 年度	700,000	210,000	910,000
総　計	2,800,000	840,000	3,640,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：ネータ多元環、フィルター環、フィルター加群、マトリス双対、アウスランダー正則、アウスランダーゴレンステイン、ホモロジー代数学、G-射影加群

１．研究開始当初の背景

ワイル代数、非可換岩沢代数はネータ性、フィルター環、ホモロジー的有限性などの共通の環論的性質を持つ。これらをネータ多元環に一般化することは重要な課題であった。より一般的に述べるならば、大局次元有限から

ゴレンステイン次元（入射次元）有限への一般化、である。岩沢代数に関しては、捻じれ加群の構造定理が完成される、という背景があった。研究代表者によって、フィルター加群、それに付随した次数加群、そしてリース加群の grade, ゴレンステイン次元に関する不等式が完成された。ゴレンステインフィルター環上ホロノミック加群を定義し、それがワイル代数上のホロノミック加群と同様な良い性質を持つことを示した。以上をネータ多元環に一般化することが本研究の動機であった。

２．研究の目的

ホモロジー的有限性を持つフィルターネータ環上の有限生成加群の圏のホモロジー的性質を明らかにする、一般的に言い換えると、非可換ネータ環の構造及び表現を研究することである。更にその結果をワイル代数、非可換岩沢多元環等の重要な非可換環に応用することである。構造的に良い性質を持つフィルターを構成すること。誘導される次数環を調べ両者の関係を明らかにすること等が研究の目的となる。更に、アウスランダー正則、アウスランダーゴレンステイン環のようなホモロジー的有限性を持つ環を見い出し、その上の表現について研究した。

３．研究の方法

これまで研究したフィルター擬コムパクトネータ多元環およびアルティン多元環を中心にそれらの商環、部分環についての情報を広く集めた。フィルター環であること、ネータ環であることがどのように効果を与えているのかを非可換ネータ環の構造論、表現論、ホモロジー論を通して明らかにすることを目指した。例えば、大局次元有限をゴレンステイン次元有限に一般化する為の条件は何か、等を考える。そのために環論・表現論の研究者（名古屋大学、山梨大学等）と研究打ち合わせを行い専門的かつ詳細な情報を集めた。最近の傾向を反映し、G-射影加群のなす圏における表現を一般化する方向で研究を行った。特に、種々の圏について近似理論を構築することと部分完全分解加群および右Ｇ近似を持つ加群のなす圏のトランスポーズ、シジジーによる普遍性について研究した。

４．研究成果

フィルター擬コムパクト多元環の位相を純代数的に取り扱うことはフィルター擬コムパクト多元環の代数的研究に役に立つ。
ネータ多元環上の有限生成加群の、(余)シジジー、G-射影加群とその一般化について得られた結果はネータ多元環の表現の研究の基礎である。そのために、必要なフィルター付き多元環をフィルター付き多元環のクラスから発見した。ここで、マトリス双対を持つことが最も重要な要件であった。このとき、フィルター付きΛ加群M,Nに対しＭが擬コムパクトの場合は順極限により、Ｎが余擬コムパクトの場合は逆極限によってM,Nの双対にフィルタ付けができることを示した。この基本命題により、例えばＥ－双対（－）’が完全列を保つことが生きてくる。そして、Ｍが擬コンパクトならばM’ は余擬コンパクト、Ｎが余擬コンパクトならばN’は擬コンパクトが示された。特に、ΛはΛ”に同型、Λ‘はアルティン加群であることが示された。G-射影加群に関する、ホモロジー代数的結果を部分完全加群に対し拡張することを試みた。分解部分圏、テイトコホモロジーについてネータ多元環上の圏に一般化した。
Ｇを一様 pro-p 群とする。このとき、岩沢代数Λ(G)は右かつ左ネータ環かつ局所アウスランダー正則整域である。Λ(G)はＪ進フィルター付け FΛ(G)を持つ、但し、ＪはΛ(G)の根基とする。このときΛ(G)はこのフィルター付けについて完備である。Ｇがｐ値コムパクトｐ進リー群または一様 extra-powerful pro-p 群ならばフィルター付け FΛ(G) はザリスキ的である。そしてこれらの場合、Λ(G)はフィルター付き擬コムパクト多元環の典型的な例である。我々の研究の結果 Iwasawa 多元環の意味のある一般化の一つがフィルター付き擬コムパクト多元環と言える。Γをフィルター付き擬コンパクト多元環とする。このとき擬コンパクトΓ加群のなす圏と離散Γ加群のなす圏との間に双対が

ある。これはこのような多元環のホモロジー論的研究の基礎である。この双対をフィルター付き擬コンパクト多元環上の適当な圏上に置き換える。そして、そのような多元環の局所コホモロジーおよび局所双対を研究した。更に、バス数、ゴレンステイン性などの、ネータ多元環において良い振る舞いをするホモロジー的性質についての結果をフィルター付擬コムパクト環にも期待して調べた。圏 C(D)とは全ての有限生成（有限余生成）擬コムパクト（余擬コンパクト）なΛ加群の全体とする、但し、Λはフィルター付き擬コンパクト R-多元環とする。そして反変関手 F:=HOM(-,E)が C と D の間にマトリス双対を与えることを示した。次に幾つかのホモロジー代数上の道具を導入した、即ち、S-depth、局所コホモロジー、アウスランダー＝ブックスバウム公式である。これらを基に、局所コホモロジー加群を構成し、擬コンパクト多元環の研究に応用した。これらの結果とマトリス双対を使いフィルター擬コンパクト多元環における局所双対を与える。そのような観点から、フィルター付き擬コムパクト多元環Λを定義した。Λは左かつ右ネータ的、フィルター付き環であり次を充たす。１）各フィルター｛F(i)Λ｝はΛのイデアル　２）ΛはFΛについて完備、３）ΛのF(i)Λによる商は右かつ左Λ加群と見て長さ有限、４）Λはある可換環 R 上の多元環で良い性質を持つ。Λが半完全という基本結果を示した。これらの条件を充たす多元環をフィルター付き擬コムパクト多元環と名付け、研究した。このように名づけることも一つの成果である。以下の説明に必要な R 加群 k の入射包絡を E で表す。このとき(M)'を E-双対とする。フィルター付きΛ加群,M,N に対し、極限との両立性が得られた、即ち、M が擬コンパクトならば、M'は長さ有限な加群の順極限に同型、N が余擬コンパクトならば N'は長さ有限な加群の逆極限に同型、であることを示した。フィルター加群 N,M,L とその間の写像 f 、 g からなる短完全系列に対し双対（'）をとった時に再び完全になる条件を与えた。加群に関する基本的なオペレイションについては、フィルター加群 M の部分加群 N に対し、誘導されたフィルターを考えるとき、M が擬コムパクトかつ FM が良いフィルターならば N,M/N は擬コンパクトである。M が余擬コンパクトならば N,M/N は余擬コンパクトである。入射性に関しては次の重要な成果が得られた。右かつ左Λ加群と見てΛ' は入射的。従ってここの環は我々が求めている環として適当であることがわかる。以下ではこのΛ'の有限入射次元を d とおく。M,N をフィルターΛ加群とする。そのとき M が擬コムパクトならば M'は余擬コムパクト、N が余擬コンパクトならば N'は擬コンパクト、更にΛはΛ"と同型、Λはアルティン的。以上を 2 つの圏 C,D に応用して簡単な形の命題を得た。即ち、M∈C ならば M' ∈D かつ M"は M と同型。N∈D ならば N' ∈C かつ N"は N と同型。圏 C,D の特徴付けも得た。M を有限生成Λ加群とする。このとき、あるフィルター付け FM があり、M は C に入る。同様に、N を有限余生成Λ加群とする。このとき、あるフィルター付け FN があり、N は D に入る。局所コホモロジーに関しては以下の成果が得られた。通常どうりに局所コホモロジー関手 H(i)を関手Γの右導来関手として定める。ここでΓは M に対しΓ(M)={x∈M:H(-i)x=0}と定める。その結果得られた成果は、H(i)(M)は余擬コムパクト加群で適当な順極限で表せられる。

この結果をアウスランダー正則とは限らない環上に拡張することを試みた。現在のところ、EXT 群の消滅が傾加群の存在を保証することがわかった。非可換ネータ多元環について上記を一般化し、非可換ネータ多元環上の表現論の研究に応用した。ホモロジー代数学の不変量の基盤である EXT 群についてその消滅などを研究した。対象とする環を可換ネータ環上加群として有限生成な多元環、即ち、（非可換）ネータ多元環である。対象とする圏はこのネータ多元環 A 上有限生成加群の圏およびその部分圏である。[R] R. Takahashi、Remarks on modules approximated by G-projective modules , J.Alg.301(2006). において可換環 R について良い条件の下で G-射影加群に関わる幾つかの結果が得られている。これらをネータ多元環 A および modA に拡張した。A を半完全環とする。このとき以下を得た：１）

modA における近似、２）余シジジーと圏 proj A の直交性　３）転置関手 Tr，シジジー　Ω、余シジジー　Ω(－１) が安定圏上の関手として等式 TrΩ＝Ω(－１)Tr を満たす。これらの基本技術を使い、[R]の対応する結果を一般化し、G-射影加群のなす圏の双対、転置、(余）シジジー　等の関手による不変性を証明した。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔学会発表〕（計２件）

① 西田憲司、整環の表現と傾加群、56 回代数学シンポジウム、2011 年 8 月 9 日　岡山大学

② 亀山統胤、西田憲司、フィルターネータ環上のマトリス双対、日本数学会、2009 年 9 月 27 日　大阪大学

６．研究組織
(1)研究代表者
　西田　憲司（NISHIDA　KENJI）
　信州大学・理学部・教授
　研究者番号：70125392