

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 5月31日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2012

課題番号：21540037

研究課題名（和文） ホッジ加群及び一般混合層の理論の新たな応用

研究課題名（英文） New applications of the theory of mixed Hodge modules and mixed sheaves

研究代表者

齊藤 盛彦（SAITO MORIHIKO）

京都大学・数理解析研究所・准教授

研究者番号：10186968

研究成果の概要（和文）：ホッジ構造論、代数サイクル論、特異点論、特性類論などといった代数幾何学の様々な分野において、ホッジ加群の理論を応用する事により多くの新しい結果を得た。例えば特性類論においては、射影多様体の完全交叉部分多様体の特性類と仮想特性類との差を表すヒルツェブルフ・ミルナー類をホッジ加群の消滅輪体を用いて帰納的に表す全く新しい公式を得た。これらの結果の多くはホッジ加群の理論無しには証明され得ないものである。

研究成果の概要（英文）：By applying the theory of mixed Hodge modules, many new results are obtained in various fields of algebraic geometry such as Hodge structures, algebraic cycles, singularities, characteristic classes, etc. In case of characteristic classes, for instance, a completely new formula for the Hirzebruch-Milnor classes of complete intersections of smooth projective varieties is obtained by using vanishing cycles of mixed Hodge modules inductively. Many of these results cannot be proved without using the theory of mixed Hodge modules.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010年度	900,000	270,000	1,170,000
2011年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	2,800,000	840,000	3,640,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：ホッジ加群、ネロン模型、チャウ・キュネット分解、超平面配置、ヒルツェブルフ類、消滅輪体、コンツェヴィチ予想

## 1. 研究開始当初の背景

(1) ホッジ加群の理論とは、ヴェイユ予想を解決する為にグロタンディックが創始し、更にドリーニュらによって発展させられて来

たエタール混合層の理論に対し、標数0において対応すべきものとして導入されたのであったが、これらの理論はそれ自身正確な理解を得るのにかなりの時間と労力を必要と

することもあって、代数幾何における応用が十分に為されているとは必ずしも言い難い状態にある。例えば、エタール混合層の理論については、基礎体が代数閉体または有限体の場合にはドリーニュらによって整備されてはいるが、基礎体が代数閉体とは限らない場合においては、満足のいく理論はほとんど無いに等しい。これは、一般混合層の理論を構築するためにはかなりの障害になるので、ぜひ解決しておく事が望ましく思われるが、ただし考えようによっては、これはドリーニュらによってさえも手が付けられずに残った問題でもあるわけで、そう簡単に解決されるもので無い事も明らかである。そこで、既存の理論を使って、エタール混合層の理論を一般の場合にどこまで展開していく事ができるかを確かめることも重要である様に思われる。

(2) ホッジ加群の理論に関しては、相変わらず、少し怪しげな使い方をしては次々と結果を出しているような論文が散見される。これらの論文の多少不正確な箇所を修正して、信頼性のあるものに変えていく事も、かなり意味のある事のように思われる。また、ホッジ加群を使えば簡単に証明されるにもかかわらず、かたくなに使う事を拒否して頑張っている論文も未だに存在する。この状況を少しずつでも変えていくようにしなければならない。

## 2. 研究の目的

例えば代数多様体の退化に伴う極限ホッジ構造の場合を見ても明らかなように、ホッジ加群を使うと使わないとでは、できる事に多少とも差が表れて来るものである。そこで内外の研究者たちとの討論を通じてホッジ加群の理論の代数幾何における新たなる応用を発見し、また間違った使い方を訂正すると

ともに、これらの理論とエタール混合層の理論との新たなる展開をみだすことが本研究の目標であった。

## 3. 研究の方法

内外の共同研究者たちとの討論を通じて、現在かなり興味をもたれている問題で、かつホッジ加群の理論を有効に使えるようなものを探る事が肝心となる。更にこの問題に対して、ホッジ加群の理論をどの様に適用させることが出来るかも鍵になる。具体的には様々な研究集会に参加して、個人的に議論を重ねる事によりアイデアが得られた事も多いが、論文のレフェリーの仕事を通じてかかわり合いが始まることも時々ある。

## 4. 研究成果

(1) シュネル氏のネロン模型が一次元底空間の場合にどの様なものになるかについて、例えばグリフィス・グリーン・ケールのネロン模型との関係等を、シュネル氏との共同研究の結果明らかにした。一般の場合には、シュネル氏のネロン模型はかなり複雑なものであるので、彼の理論を理解するにはかなり役立つものと思われる。

(2) 代数サイクルについては、3次元の射影多様体からの任意の写像に対して相対チャウ・キュネット分解が存在することをミュラー・シュタック氏との共同研究により証明し、3次元の場合の絶対チャウ・キュネット分解が存在するための幾つかの十分条件(一部は再証明)を得た。

(3) 超平面配置については、ミルナー・コホモロジーが消えないための十分条件などを、ブドゥール氏やディムカ氏らと共に研究し、さらにブドゥール、ユズヴィンスキー両氏と共に超平面配置の場合の  $p$ -進又は位相的ゼ

ータ函数の極と  $b$ -函数の根との間の関係についての井草氏及びロゼール、デーネフ両氏の予想に関する研究を行い、3次元の場合等に肯定的解決を得た。

(4) 特異点の理論に関するディムカ氏との共同研究においては、まず無限遠点において従順な特異性を持つ多項式で定義された写像に付随した局所系の無限遠点におけるウェイトフィルトレーションのモノドロミー性に関するサバ氏の結果を、フーリエ変換や非確定特異点型の微分方程式系等を使わずに、特異点の専門家にとっても解り易い方法で証明する共同論文を書いた。

(5) 上記に続いて、代数多様体の族に対してその局所モノドロミーのジョルダン因子の中で大きさが理論上最大値を取るものの個数を、特異点の還元により得られた正規交叉因子の重複度等を使って一定の条件下において表す公式を得た。この証明にはステンブリック氏やズッカー氏等によって始められた幾何学的極限混合ホッジ構造の理論が本質的に使われる。ただしここでより興味あるのは、その個数が組合せ論的な情報だけでは決まらない様な例が存在する事のように思われる。また、以前ディムカ氏等と行った非特異射影超曲面に関するグリフィスの結果を特異点がある場合に拡張する研究の続きも現在進行中である。

(6) ホッジ加群の対称積に関するマキシム、シュルマンの論文にかなり基本的な誤りがあるのを発見したので、それを訂正して、ホッジ加群の多重外部積上への対称群の自然な作用の存在を証明して、それを彼らとの共著の論文にまとめた。これは  $D$ -加群と偏屈層とでは、 $t$ -構造にかなりの差があることから

来るものであるが、これにより彼ら二人や彼らの別の共同研究者らによる対称積のヒルツェブルフ特性類に関する理論の正当性が保証された。これは、ホッジ加群の理論が極めて表面的にしか理解されていない事によるものであるが、この種の誤りは実際よくおこる事でもあり、それを防ぐ為に現プロジェクトが存在するゆえんでもある。

(7) 上記に続いて、超曲面の特性類と仮想特性類との差を表すヒルツェブルフ・ミルナー類を消滅輪体を用いて表す彼らの公式が、射影多様体の豊富因子の場合を含んでいないのに気がついたので、この場合の公式を発見し、それを更に射影多様体の完全交叉部分多様体の場合に拡張して証明を行った。ここではホッジ加群の消滅輪体の理論が本質的に用いられる。

(8) ホッジ加群の次数付き商の双対に関するシュネル氏の論文について、理論がそれがあるべき姿では述べられていないのに気がついたので、もっと一般のフィルター付き  $D$ -加群の次数付き商の双対の理論として自然な定式化と証明を与え、それを共著の論文にまとめた。このことについて書かれた論文は今のところ存在しないので、この話については、かなり基本的な論文になるものと思われる。

(9) 消滅輪体の代数的公式に関するコンツェヴィチ氏の予想についてのサバ氏の論文の中にいろいろと誤りがあるのに気づいたので、彼との共同研究として、かなり以前にやったホッジ加群の消滅輪体の計算を使ってもっと自然な証明を与え、更にその確定特異点型の  $D$ -加群の場合への一般化をおこなった。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計6件)

- ① Maxim, Laurentiu; Saito, Morihiko; Schürmann, Jörg, Hirzebruch-Milnor classes of complete intersections, Adv. Math. 241 (2013), 220-245. (査読有)  
DOI: 10.1016/j.aim.2013.04.001
- ② Müller-Stach, Stefan; Saito, Morihiko, Relative Chow-Künneth decompositions for morphisms of threefolds, J. Reine Angew. Math. 666 (2012), 141-161. (査読有) DOI: 10.1515/CRELLE.2011.119
- ③ Maxim, Laurentiu; Saito, Morihiko; Schürmann, Jörg, Symmetric products of mixed Hodge modules, J. Math. Pures Appl. (9) 96 (2011), 462-483. (査読有)  
DOI: 10.1016/j.matpur.2011.04.003
- ④ Budur, Nero; Saito, Morihiko; Yuzvinsky, Sergey, On the local zeta functions and the b-functions of certain hyperplane arrangements, with an appendix by Willem Veys, J. Lond. Math. Soc. (2) 84 (2011), 631-648. (査読有) DOI: 10.1112/jlms/jdr025
- ⑤ Budur, Nero; Dimca, Alexandru; Saito, Morihiko, First Milnor cohomology of hyperplane arrangements, Contemp. Math., 538, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011, 279-292. (査読有) DOI: 10.1090/conm/538/10606

- ⑥ Saito, Morihiko; Schnell, Christian, A variant of Néron models over curves, Manuscripta Math. 134 (2011), 359-375.

(査読有)

DOI: 10.1007/s00229-010-0398-5

[学会発表] (計1件)

斉藤盛彦、Hirzebruch-Milnor classes of complete intersections (招待講演)、幾何学とトポロジーにおける特異点 第6回 日仏特異点シンポジウム、2011年9月6日、九州大学西新会館

6. 研究組織

(1) 研究代表者

斉藤 盛彦 (SAITO MORIHIKO)

京都大学・数理解析研究所・准教授

研究者番号: 10186968