

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 25 日現在

機関番号：16101

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2009 年度 ～ 2011 年度

課題番号：21540043

研究課題名（和文） 代数曲線の特殊線形系と射影モデルの研究

研究課題名（英文） Linear Systems and Projective Models on Algebraic Curves

研究代表者

大淵 朗(OHBUCHI AKIRA)

徳島大学・大学院ソシオ・アーツ・アンド・サイエンス研究部・教授

研究者番号：10211111

研究成果の概要（和文）：種数 g の代数曲線 C に対する平面モデルの最少次数 $s_C(2)$ は評価式として $s_C(2) \leq g+2$ が成立する。 $s_C(2) = g-t+2$ の時は種数 t の曲線に二重被覆であると言う Martens-Keem の予想を $t=0,1,2$ で考察し、特に $t=2$ の時は $g \geq 10$ なら予想は肯定的に成立、 $g \leq 9$ では各 g に反例が存在することを示した。また第 7 回代数曲線論シンポジウム（横浜国立大学にて 2009 年 12 月 05 日（土）-- 12 月 06 日（日））、第 8 回代数曲線論シンポジウム（埼玉大学にて 2010 年 12 月 11 日（土）-- 12 月 12 日（日））と第 9 回代数曲線論シンポジウム（首都大学東京にて 2011 年 12 月 10 日（土）-- 12 月 11 日（日））を開催した。

研究成果の概要（英文）：It holds $s_C(2) \leq g+2$ for any algebraic curve C with genus g where $s_C(2)$ is the minimal degree of plane models of C . Martens and Keem conjectured that $s_C(2) = g-t+2$ holds for an algebraic curve C admitting a double covering to a curve of genus t . In this research, we can conclude that Martens and Keem conjecture is true for $t=0,1$ and $t=2$ with $g \geq 10$, however we can find an important counter examples for every $g \leq 9$. On 05-06, December, 2009, we held 7th Annual Conference of Algebraic Curves and Related Topics at Yokohama National University, on 11-12, December, 2010, we held 8th Annual Conference of Algebraic Curves and Related Topics at Saitama University and on 10-11, December, 2011, we held 9th Annual Conference of Algebraic Curves and Related Topics at Tokyo Metropolitan University, respectively. We can get some good results about the minimal degree for plane models of an algebraic curve.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010 年度	900,000	270,000	1,170,000
2011 年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	2,800,000	840,000	3,640,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：代数幾何

1. 研究開始当初の背景

この研究は平成 21 年度から三年間に渡って科学研究費補助金を得て行なわれた。

本研究は代数曲線を多方面からの研究・意見交換が目的である。そのため、

- ① 特殊線形系の理論
- ② ワイアシュトラス点
- ③ ガロア点
- ④ 代数曲線符号・暗号の理論 と言った多種多様な方面からの代数曲線の研究
- ⑤ 研究集会開催

このようなことを目的とした。

完備な一次元代数多様体を一般には代数曲線と呼ぶが、この代数曲線は幾何学的にはコンパクト次元複素多様体と見なすことが出来、研究対象としては或る意味で非常に扱いやすいものである。そのため、代数幾何学に限らずいろいろな分野、例えば函数論、射影幾何学、可換環論、整数論、或いは情報理論など多岐に渡って古くから応用されている。しかしその扱われる歴史が長いということもあり、それぞれの、例えば函数論、射影幾何学、可換環論、などで開拓されてきたテクニックはもう少し改良されていく事も望ましい、というの否めない事実である。面白いことに、こういった様々な分野では、代数曲線は同値な概念であるにもかかわらず、その分野固有の考え方で取り扱うため随分異なった常識で取り扱われて居り、新鮮なアイデアに満ちているのであるが、それにもかかわらず意外に他分野に於ける代数曲線の取り扱われ方には関心が払われることが少ない。

代表者はセヴェリ予想に関連した代数曲線上の特殊線形系の族のなす多様体 に関する研究やワイアシュトラス点の研究を主に扱ってきたが、先に述べたような事情もあり、代表者が従来行ってきた固有のテクニックや考え方に固執するのではなく更に広い視点に立った考察する必要性を強く感じている。

そのため、代数曲線の様々な分野に於ける応用や逆に他分野からの応用の可能性などを見るために、三年に渡って代数曲線を中心のテーマに据えた研究集会を行ってきた。

研究スタッフについて 山口大学の加藤崇雄教授が研究する一変数複素関数論の理論、神奈川工科大学の米田二良教授の研究するワイアシュトラス半群の理論或いは神奈川大学の本間正明教授の研究する符号理論は代数曲線論の重要なテーマの一つである。更に代数曲線の自己同型の問題の専門家である新潟大学の吉原久夫教授及びその共同研

究者の行うガロア点の研究が必要と考えて研究組織のスタッフを決めた。

2. 研究の目的

代数曲線論についての理論は歴史が古くヤコビ、アーベル、ワイアシュトラスやリーマン等が扱って以来、複素関数論や代数幾何学の中で扱われる分野の1つであるが、それだけでなくヴェイユなどの貢献により整数論の研究でも使われる理論である。また近年では工学的な応用を期待して代数曲線符号とか代数曲線暗号といった研究も行われている。しかも近年では様々な分野での問題を代数曲線の情報に置き換え研究するという結果も見られるようになり、代数曲線についての詳細な研究は急務だと言えるであろう。
・山口大学の加藤崇雄教授が研究する一変数複素関数論の理論、神奈川工科大学の米田二良教授の研究するワイアシュトラス半群の理論或いは神奈川大学の本間正明教授の研究する符号理論は代数曲線論の重要なテーマの一つである。申請者は加藤教授、米田教授と共に共同研究を行っており、また本間教授の協力による研究も行っており、これらは全て成果を出す事に成功している。

このようにお互いに協力、研究すべき対象を持つ代数曲線の専門家揃った事は非常に幸運な事である。そのため申請者はお互いの関連する研究を進める事、それだけでなく更なる発展を期して、代数曲線を主たるテーマとするが出来るだけ幅広い視点に立った「代数曲線論シンポジウム」の実施を考え、申請者は以下の目的の下で研究を行いたいと考えた。

・第一に加藤教授との共同研究の発展である。これは代数曲線上の特殊線形系のなす多様体

$W_d^r(\mathcal{L}) = \{L \subset \mathbb{P}^d \mid L \cong \mathbb{P}^1, \mathcal{L}|_L \cong \mathcal{O}(r)\}$ の性質から代数曲線の詳細な分類を行うという立場のものである。 $r=1$ の場合は曲線のゴナリティー(クリフォード指数)という不変量からの分類の問題と密接な関係がありマルテンスやコッペンズと言った人たちの研究が知られていてクリフォード指数の言い方で言えばクリフォード指数33までの分類は済んでいるので研究は進んでいると見なせる。この問題に関し、加藤教授と共にあまり言及されることがなかった $r=2$ の場合(或いは広く $r \geq 2$ の場合、これらで特に一般のメンバーが birational であるような場合が重要になる)に何が起きるかを調べるという計画を立てている。birational であるような g_d^2 について、このような d の最小値 $s_C(2)$ は $g+2$ 以下(g は曲線の種数)が知られているが $s_C(2)=g+2$ と $s_C(2)=g+1$ の分類は簡単で、本質的には $s_C(2) \leq g$ が問題となる。今回最近加藤教授

との共同研究として完成した $s_c(2) = g$ の分類を受けて $s_c(2) \leq g-1$ の研究を申請期間内に行った。

・第二にワイアシュトラス点についてである。米田教授と大阪大学春井岳研究員との共同研究で代数曲線上の点で、その点の上に特殊な重複度の極を持つ代数曲線上の関数が存在するような点（ワイアシュトラス点と言う）の研究である。ワイアシュトラス点を考える際には、そこでのあらゆる可能な重複度の極を持つ関数全てを考え、それが結果的に半群を与えるので、代数的な計算ができる。そうすると、その代数的な計算の結果は、様々な線形系のデータを与えるため、先に書いた「マルテンスやコッペンズと言った人たちの研究」以上に詳細なデータを与える。この問題で重要なのは、半群を与えてもワイアシュトラス点から与えられる半群かどうか解からないので、ワイアシュトラス点になる必要充分条件を求めなくてはいけない点である。米田教授とは、この必要充分条件を最終的に得るため、様々な半群データの解析を行っている。その一つは(対象の曲線の二重被覆だけに限定して)ある条件下で与えられた半群が二重被覆上のワイアシュトラス点になる条件を求める、という問題でこれは解決できた。そこで、何かの曲線の三重被覆(特に巡回拡大である三次被覆)に限定して、同様な問題を申請期間内に研究した。

・第三にガロア点についてである。ワイアシュトラス点の問題に関連して、自己同型を有する曲線を徹底的に調べることが必要である。そのため、曲線の自己同型に関しての大きな話題の一つであるガロア点の理論で知られる新潟大学の吉原教授及びその共同研究者、長岡高専の高橋剛講師と宇部高専の三浦敬准教授とガロア点に関する研究を開始する。具体的には、吉原教授が得た平面曲線の議論をruled surfaceなど射影平面に双有理な曲面で再構成することになり、それによって吉原教授が得られなかった例の構成などを目指した。

・第四に代数曲線符号・暗号の理論についてである。代数曲線の詳細な情報から極めて特殊な性質を持った有理関数が存在する代数曲線の構成が可能になるが、このような特殊な曲線は符号理論や暗号理論でも大変有理な具体例(効率の良い符号や暗号の具体例)を与えてくれる。神奈川大学の本間教授はこの方面でも多くの結果を持つが、申請者の以前からの本間教授との共同研究の発展的内容として特殊線形系問題の応用としての符号、暗号の構成などを申請期間内に行った。

第五に研究集会開催を目的とした。代数曲線の新しいテクニックの開発は必要な事柄である。そのため、情報交換を行う場、即ち研究集会を行いたいと考えている。

申請者はここ六年ほど殆どが小規模ではあるが、代数曲線を対象に、出来るだけ幅広い視点に立った情報交換の場として代数曲線論シンポジウムを行って来た。そこでは申請者にとっても講演者にとってもお互い大変有意義な情報交換を行うことができた。このような事情もありシンポジウム開催の継続性は研究を行う上でも大事なことと考える。昨年も「第六回代数曲線論シンポジウム」を実現できたが、引き続いて2009年度以降にも「代数曲線論シンポジウム」を計画した。

3. 研究の方法

研究体制として以下の人員により研究は遂行された。

代表

徳島大学総合科学部・教授・大淵 朗
分担者

加藤崇雄(山口大学理学部教授)
連携研究者

米田二良(神奈川工科大学工学部教授)

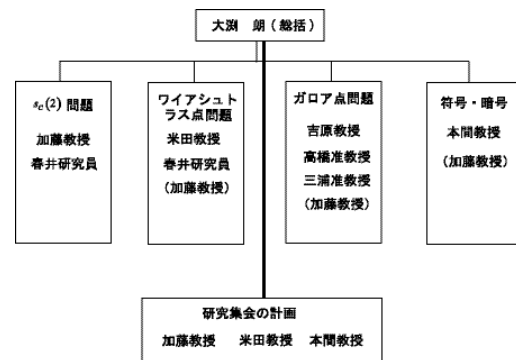
本間正明(神奈川大学工学部教授)

吉原久夫(新潟大学理学部教授)

三浦敬(宇部工業高等専門学校准教授)

高橋剛(長岡工業高等専門学校准教授)

その組織図は以下の通りであった。



研究内容についての具体的な遂行方法は以下の通りであった。

①特殊線形系の理論(加藤教授と春井研究員との共同研究)

birational であるような g_d^2 の中で d の最小値を $s_c(2)$ とすると $s_c(2) \leq g+2$ であり (g は曲線の種数) $s_c(2) = g+2$ と $s_c(2) = g+1$ は分類出来る。ここまでは非常に分類は簡単であったのだが、 $s_c(2) \leq g$ の

場合はそうはいかない。加藤教授との共同研究で $s_C(2) = g$ の分類: $g \geq 10$ なら C が種数 2 の曲線の二重被覆であることを証明した。また、 $g \leq 9$ では各 g に反例が存在することを示した。その逆について $g \neq 11$ で興味深い結果も得られた。

②ワイアシュトラス点 (米田教授と春井研究員との共同研究): ワイアシュトラス点に付随したワイアシュトラス半群が偶数 6 から始まる場合何かの曲線の三重被覆であるような曲線を考えて全て構成可能かどうかを示した。これらの構成は ruled surface 上に必要な曲線を構成するというテクニックによる。具体的には曲線 E の三重被覆であるような曲線 C の被覆 $\pi: C \rightarrow E$ は $\pi_* \mathcal{O}_C = \mathcal{O}_E \oplus E$ と分解する。そこで C は irrational な ruled surface $P(E)$ に埋め込まれ、その (C の) 線形同値類も完全に計算できる。これから必要なワイアシュトラス点に付随したワイアシュトラス半群の情報は線形系 $|C|$ から構成でき、申請者は米田教授と共にこの構成法に従った具体例の構成を完成した。

③ガロア点 (吉原教授およびその共同研究者との共同研究): 吉原教授の共同研究者である長岡高専の高橋講師と宇部高専の三浦准教授により吉原教授の結果の幾つかを ruled surface $P(\mathcal{O}_{P^1} \oplus \mathcal{O}_{P^1}(-e))$ 上に拡張することが出来た。計算方法は吉原教授の結果の拡張と言う考え方で行う事ができた。

④代数曲線符号・暗号の理論 (本間教授との共同研究): 本間教授との共同研究の発展的内容として特殊線形系問題の応用として、色々な種類の、特に有用と思われる符号、暗号の具体的な構成を行った。

4. 研究成果

代表者は第 7 回代数曲線論シンポジウムを横浜国立大学にて 2009 年 12 月 05 日 (土) -- 12 月 06 日 (日) に、第 8 回代数曲線論シンポジウムを埼玉大学にて 2010 年 12 月 11 日 (土) -- 12 月 12 日 (日) に、また第 9 回代数曲線論シンポジウムを首都大学東京にて 2011 年 12 月 10 日 (土) -- 12 月 11 日 (日) に開催した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

①Akira Ohbuchi, Jiryō Komeda Weierstrass gap sequences at points of curves on some rational surfaces, Tsukuba Journal of

Mathematics, 2012, to appear
査読有

②Akira Ohbuchi, Takeshi Harui On the number of pencils of minimal degree on curves with small gonality, JP Journal of Geometry and Topology, Vol.11-1, 2011, 191-229
査読有

③Akira Ohbuchi, Takeshi Takahashi Automorphisms of a nonsingular curve on a rational surface of Picard number three, Far East Journal of Mathematical Sciences, Vol.47, No.1, 2010, 109-119
査読有

④Akira Ohbuchi, Takao Kato, Takeshi Harui Quotient Curve of Smooth Plane Curves with Automorphism, Kodai Mathematical Journal, Vol.33, No.1 2010, 164-172
査読有

⑤Akira Ohbuchi, Takao Kato, Takeshi Harui The minimal degree of plane models of algebraic curves and double coverings, Geometriae Dedicata, Vol.30, No.1, 2009, 43-54
査読有

6. 研究組織

(1) 研究代表者

大瀨 朗 (OHBUCHI AKIRA)
徳島大学・大学院ソシオ・アーツ・アント・サイエンス研究部・教授
研究者番号: 10211111

(2) 研究分担者

加藤 崇雄 (KATO TAKAO)
山口大学・理学部・教授
研究者番号: 10016157

(3) 連携研究者

米田 二良 (KOMEDA JIRYO)
神奈川工科大学・工学部・教授
研究者番号: 90162065
本間 正明 (HOMMA MASAOKI)
神奈川大学・工学部・教授
研究者番号: 80145523
吉原 久夫 (YOSHIHARA HISAO)
新潟大学・理学部・教授
研究者番号: 60114807
三浦 敬 (MIURA KEI)
宇部工業高等専門学校・准教授
研究者番号: 50353321
高橋 剛 (TAKAHASHI TAKESHI)
長岡工業高等専門学校・准教授
研究者番号: 60390431