様式C－19

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年　5 月 17 日現在

機関番号：22604
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2009～2012
課題番号：21540046
研究課題名（和文）　整閉包とその周辺の研究

研究課題名（英文）　Research on integral closure and related topics

研究代表者
川崎 健（Kawasaki Takesi）
首都大学東京・理工学研究科・助教
研究者番号：40301410

研究成果の概要（和文）： 可換代数にはホモロジカル予想と呼ばれる予想群がある。
この中で正準元予想・改良新交差予想・単項式予想・直和因子予想の四つは互いに同値であり、また多くの予想がこの四つから導かれる。
本研究ではこのうち正準元予想について Cousin 複体を用いた特徴付け、既知の部分的結果の新証明、p 標準パラメーター系を用いた新しい十分条件を得た。

研究成果の概要（英文）：We obtain a new characterization of the canonical element conjecture, which is a most important one among homological conjectures, and give new other proofs of known partial results about it. Furthermore, we obtain a new sufficient condition using a p-standard system of parameters.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2009 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010 年度	700,000	210,000	910,000
2011 年度	700,000	210,000	910,000
2012 年度	700,000	210,000	910,000
総　計	3,100,000	930,000	4,030,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学，代数学
キーワード：正準現予想，改良新交差予想，単項式予想，直和因子予想，シジジー予想

１．研究開始当初の背景

1992 年 C. Huneke (Uniform bounds in noetherian rings, Invent. Math. 107 (1992), 203-223)は一様 Briançon-Skoda 定理と呼ばれる次の定理を与えた.

定理 1. Aは被約な Noether 環で次のいずれかを満たすとする.

(1) Aは有理整数環または Noether 優秀局所環上本質的に有限型.
(2) Aの標数は正整数で，A はF有限.

このときAのみに依存する定数kがあって任意のAのイデアルIと正整数nに対し$I^(n+k)$の整閉包はI^nに含まれる.

Huneke はこの定理を証明するにあたり，二

つの命題を(1)，(2)の仮定のもとで証明した．そしてその命題がより弱い仮定のもとで成立するであろうと予想した(前掲論文，予想 2.9 と 2.13)．私は(2001 年から 2003 年にかけて科学研究費補助金を受けて行った研究の成果である) Cousin コホモロジーの有限性を用い Huneke の予想 2.13 を非常に弱い仮定のもとで証明していた(T. Kawasaki ``On Faltings' annihilator theorem'', Proc. Amer. Math. Soc. 136 (2008), 1205-1211, 定理 4.1)．そこでこの問題の解決は間近だと思われた．

また 1992 年 M. Hochster と C. Huneke (Infinite extensions and big Cohen-Macaulay algebras, Annals of Math. 135 (1992), 53-89)は次の定理を証明した．

定理 2. Aを正標数の優秀局所整域，Kをその商体，A^+をKの代数的閉包におけるAの整閉包とするとA^+は(有限生成ではないが)極大 Cohen-Macaulay 加群．

これはホモロジカル予想の中でも最も重要な big Cohen-Macaulay 予想の正標数の場合の新証明である．私はやはり Cousin コホモロジーを利用して「優秀」という仮定をより弱い条件に置き換えることに成功していた．商体の代数的閉包の中で整閉包をとるという方法では正標数の場合以外で big Cohen-Macaulay 予想を解くことはできないことがわかっていたが，正標数の場合を解析することが，それ以外の場合を研究するにも役立つと思われた．

２．研究の目的
本研究の目的は可換環・イデアルの整閉包と関連する次の二つの問題について知見を深めることを目的としていた．
(1) 一様 Briançon-Skoda 定理
(2) 整閉包の Cohen-Macaulay 性

３．研究の方法
(1)，(2)に関連する先行する結果を点検・解析し，1990 年代以降に可換代数に導入された新概念(たとえば Cousin 複体の研究で重要な役割を果たした p 標準パラメーター系)を用いることで新証明・拡張を目指す．

４．研究成果
一様 Briançon-Skoda 定理の改良，整閉包の Cohen-Macaulay 性の解析はいずれも困難だったので big Cohen-Macaulay 予想より弱いが重要性では劣らない正準元予想について研究し，以下の結果を得た．

(1) Cousin 複体を用いた正準元予想の特徴付けを与えた．すなわちAを Noether 局所環，$C^¥bullet$をその Cousin 複体，$¥phi^¥bullet: F_¥bullet ¥to C^¥bullet$を$C^¥bullet$の極小自由分解とする(図 1)とき$A$で正準元予想が成立することと$¥phi^{-1}$が全射でないことが同値．

$$
\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
F^{-2} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
F^{-1} \arrow[r, "\phi^{-1}"] \arrow[d] & C^{-1} \arrow[d] \\
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
F^{n-2} \arrow[r, "\phi^{n-2}"] \arrow[d] & C^{n-2} \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & C^{n-1} \arrow[d] \\
 & C^{n} \arrow[d] \\
 & 0
\end{tikzcd}
$$

図 1

(2) M. Hochster ``Canonical elements in local cohomology modules and the direct summand conjecture", J. Algebra 84 (1983), 503-553 の定理 4.3 の新証明を与えた．すなわち$(A, ¥mathfrak m)$をn次元 Noether 局所環，K_Aをその正準加群，Eを剰余体の入射包絡とするときAで正準元予想が成立することと自然な射$Ext_A^n(A/ ¥mathfrak m, K_A) ¥to H_{¥mathfrak m}^n(K_A) ¥to E$が零射でないことが同値．

(3) S. P. Dutta ``Dualizing complex and the canonical element conjecture”, J. London Math. Soc. (2) 50 (1994), 477-487 の定理 1.3 の新証明を与えた. すなわち$(A, ¥mathfrak m)$をn次元 Noether 局所環, $D_A^¥bullet$をその双対化複体, $¥phi^¥bullet: ¥sigma_{>-n} D_A^¥bullet ¥to I^¥bullet$ を $¥sigma_{>-n}D_A^¥bullet$の極小入射分解とする(図 2)と, Aで正準元予想が成立することと$D_A^0 ¥to I^0$が単射でないことが同値.

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & \\
\operatorname{Im} d^{-n} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
D_A^{-n+1} \arrow[r, "\phi^{-n+1}"] \arrow[d] & I^{-n+1} \arrow[d] \\
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
D_A^{-1} \arrow[r, "\phi^{-1}"] \arrow[d] & I^{-1} \arrow[d] \\
D_A^{0} \arrow[r, "\phi^{0}"] \arrow[d] & I^{0} \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & I^{1} \arrow[d] \\
 & \vdots
\end{tikzcd}
$$

図 2

(4) S. P. Dutta ``Splitting of local cohomology of syzygies of the residue field’’, J. Algebra 244 (2001), 168-185 の定理 1.4 の新証明を与えた. すなわち$(A, ¥mathfrak m)$をn次元 Noether 局所環($n > 3$), S_iをAの剰余体のi次シジジーとすると図 3 が可換. K_A を A の正準加群, $¥eta^{(i)}$を剰余体の恒等写像(図 3, 左上隅の元)の $H_{¥mathfrak m}^i(S_i)$における像とする. もし $¥eta^{(n-1)} ¥ne 0$, $A ¥eta^{(n-1)}$ が $H_{¥mathfrak m}^{n-1}(S_{n-1})$の直和因子かつ $depth K_A > 2$ならばAで正準元予想が成立する.

$$
\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_A(A/\mathfrak{m}, A/\mathfrak{m}) \arrow[r] \arrow[d] & H^0_{\mathfrak{m}}(A/\mathfrak{m}) \arrow[d] \\
\operatorname{Ext}^1_A(A/\mathfrak{m}, S_1) \arrow[r] \arrow[d] & H^1_{\mathfrak{m}}(S_1) \arrow[d] \\
\operatorname{Ext}^2_A(A/\mathfrak{m}, S_2) \arrow[r] \arrow[d] & H^2_{\mathfrak{m}}(S_2) \arrow[d] \\
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
\operatorname{Ext}^{n-2}_A(A/\mathfrak{m}, S_{n-2}) \arrow[r] \arrow[d] & H^{n-2}_{\mathfrak{m}}(S_{n-2}) \arrow[d] \\
\operatorname{Ext}^{n-1}_A(A/\mathfrak{m}, S_{n-1}) \arrow[r] \arrow[d] & H^{n-1}_{\mathfrak{m}}(S_{n-1}) \arrow[d] \\
\operatorname{Ext}^{n}_A(A/\mathfrak{m}, S_{n}) \arrow[r] & H^{n}_{\mathfrak{m}}(S_{n})
\end{tikzcd}
$$

図 3

(5) p 標準パラメーター系を利用した新しい十分条件を発見した. すなわち(4)と同じ記号で, x_1, ¥dots, x_nをAの p 標準パラメーター系とする. もし $depth K_A > 3$, $depth (H_{(x_1, x_2)}^1H_{(x_3,¥dots, x_n)}^{n-3}(S_{n-2}))^¥vee > 0$ならば$A$で正準元予想が成立する.

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計０件）

〔学会発表〕（計０件）

〔図書〕（計０件）

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
　川崎 健（Kawasaki Takesi）
　首都大学東京・理工学研究科・助教
　研究者番号：40301410

(2)研究分担者
　なし

(3)連携研究者
　なし