様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２４年　５月　31 日現在

機関番号：３２６６１
研究種目：基盤研究（Ｃ）
研究期間：２００９～２０１１
課題番号：２１５４００４８
研究課題名（和文）：グレブナー基底の統一理論と加群のシチジーへの応用

研究課題名（英文）：A unified theory of Gröbner bases and an application to syzygies of modules

研究代表者
小林　ゆう治（KOBAYASHI YUJI）
東邦大学・理学部・訪問教授
研究者番号：７００３５３４３

研究成果の概要（和文）：　書換えシステムの手法により，代数系のグレブナー基底の理論を統一し、それを代数、イデアル及び加群にかかわる様々な計算に応用した。整列順序をもった半群を基底とする代数*F*及び*F*-射影加群*FX* 上のグレブナー基底の理論を構成し、危険対定理を証明した。さらに、*H* が射影加群FX のグレブナー基底ならば、危険対から作られるサイクルが*FH* のシチジーの生成系になることを示した。

研究成果の概要（英文）： We develop a unified theory of Gröbner bases, and apply it to various calculations concerning algebras, ideals and modules. We construct a theory on an algebra *F* based on a well-ordered semigroup and on a projective *F*-module *FX*, and we prove the critical pair theorem. We obtain a main result that the cycles made from critical pairs in *FH* form a generating system of syzygies, if *H* is a Gröbner basis on *FX*,

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2009 年度	500,000	150,000	650,000
2010 年度	500,000	150,000	650,000
2011 年度	400,000	120,000	520,000
年度			
年度			
総　計	1,400,000	420,000	1,820,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：グレブナー基底、シチジー、書き換えシステム、順序半群、イデアル、加群、完備化

１．研究開始当初の背景

グレブナー基底は１９６０年代に Buchberger (1965) によって導入され、その応用の広さから、近年、計算代数の中心的課題として研究されている。グレブナー基底の一般化も色々追求され、多項式環を一般化した代数 (Kandre-Rody, Weispfenning, 1990)、非可換多項式環 (More, 1994)、パス代数 (Green, 2000) などに拡張された。

また、グレブナー基底を求めるBuchberger のアルリゴズムの効率化の研究も盛んになされてきた。非可換なシステムでは、アルゴリズムの停止性が計算科学の立場から議論された (Otto, Madlener)。

本研究は、これらの研究を基に、順序半群上の代数、及び、代数上の加群において、グレブナー基底の理論を展開し、理論統一をしようとしたものである。

２．研究の目的

この研究の目的は書換えシステムの手法により、代数系のグレブナー基底の理論を統一し、それを代数、イデアル及び加群にかかわる様々な計算に応用することである。

多項式環上のグレブナー基底の理論は、Buchberger により創設され、可換環論や代数幾何学において、実際的な計算手段を与え、多方面への応用分野が開けている。グレブナー基底をさらに広い環の上に一般化する試みは盛んになされ、多項式環に近い環（solvable type）から、自由代数、パス代数などへ拡張されている。

本研究は，上記の結果を含む、さまざまな代数上のグレブナー基底の理論を、書換えシステム理論の手法で、一般化された枠組み（整列順序をもった半群を基底とする代数上）で展開し、統一することである。

さらに、その代数上の加群におけるグレブナー基底の理論を構成し、それを、シチジーの計算、部分加群の構成やホモロジーの計算に応用する。

この研究は、グレブナー基底の理論を、今までの個別に設定された枠組みを含む一般的枠組みで議論し、理論を統一しまとめようとするものであり、前科研費研究から継続する一連の研究の集大成を目指した。

３．研究の方法

書換えシステムの理論は、数理論理学、形式言語理論、計算理論など複数の分野から生じ、現在では、数学、計算機科学における主要な手法の１つになっている。Buchberger により創設されたグレブナー基底の理論も、Knuth (1970) や Huet (1980) 等による、書換えシステムの理論の手法で統一的に展開するのが自然である。

この研究は，多項式環のグレブナー基底と非可換代数系のグレブナー基底を、書換えシステム理論の視点から、統一的枠組みで議論し、理論構成をしようとするものである。グレブナー基底は、非可換代数系の場合にも，可換の場合と同様、具体的な計算手段を与えるものであるが、それを加群上に展開し、シチジーの計算を出発点にして、応用を追求した。

この分野は、代数学、アルゴリズム理論、計算理論などが交錯する境界領域であり、広く関連する分野の文献資料を収集し調べることから始めた。国内外の関連分野の研究者から専門知識を求め、互いに知識交換、討論を行い研究を進めた。国内では、伊藤氏（京都産業大学）、辻氏（天理大学）との討論、海外では、Otto (Kassel Univ.) との集中的討論の中から多くのアイデアを得た。

グレブナー基底の理論は理論的美しさと共に、具体的計算と結びつき、様々な代数的問題に対する解法を与える。本研究でも理論の有効性や、具体的応用例を実際計算で確認した。多項式を伴う計算の実行には、数式処理システム (Mathematica) を活用した。

４．研究成果

代数系のグレブナー基底の理論を統一し、それを代数系の計算に応用することを行った。整列順序をもった半群を基底とする代数上で、書換えシステムを考察することで、グレブナー基底の理論の統一的展開を行った。その手法を、代数の加群上でも実行し、理論構成を行った。詳しくは以下のとおりである。

（１） まず、可換環K 上の線形空間において、書換えシステムの理論を展開した。書換えを空間上のある種の変換ととらえ、システムの停止性、完備性、既約性を議論した。

（２） 整列順序をもった半群 $S = B \cup 0$ を考え，B を基底とするK-代数 $F = KB$ 上のグレブナー基底の理論を構成した。半群 S のとり方で今までの多くの代数を実現できるので，統一した議論が可能になった。

書換えルールを項に適応するときの順序を考慮し、危険対の概念を導入した。S は零因子も含むので、それから生ずる特別な元 (z-element) を考える必要があり、システムがグレブナー基底になるための必要十分条件は、すべての危険対と z-element が解消されることであるという、危険対定理を証明した。この定理は完備化のアルゴリズム（Buchberger Completion）の基礎になるが、一般の状況で、アルゴリズムの停止条件 (Dikson condition) を考察した。

（３） F 上のグレブナー基底 G を１つ固定した状況で、F-（左）加群のグレブナー基底の理論を構成した。X で生成されるF-射影加群 FX 上で書換えシステム H を考え、H と G による書換を同時に考慮し、理論展開することが肝心である。危険対は、H のルールの重なりから生ずるもの (critical pair of the first type) と、G と H のルールとの絡みから生ずるもの (critical pair of the second type) を考慮する必要がある。この２種類の危険対と、z-element が解消されればシステムが完備になる、という加群上の危険対定理が得られた。

（４） H をF-射影加群 FX の部分集合としたとき、H の書換えをF-射影加群 FH の元として記録する。書換え列 p の書換えの記録を加算し

てFH の元$\int p$ が得られる。FX の元 f に対し f の標準簡約列 pf の積分$\int pf$ を対応させ、線形写像$\int : FX \to FH$ を得た。この写像は下の（５）の基本定理の証明の鍵になった。

（５） FH 生成元［h］をh に送る写像 $d : FH \to FX$ の核が H のシチジーと捉えることができる。このとき、H がグレブナー基底ならば、$(G;H)$ の危険対と z-element の解消列 p の積分$\int p \in FH$ の集合 C がシチジーの生成系にもなるというのが，この研究で得られた基本定理である。

（６） シチジーの生成系の計算を，H がグレブナー基底でないときは、H を完備化することでできるようにし、それをイデアルの共通部分や消去イデアルの計算に応用した。

（７） シチジー計算を帰納的に適用することにより、加群の射影分解が得られるので、これを（コ）ホモロジーの計算に応用できる。これを実際例で確かめた。

（８） 基底の半群 S の拡大積にも整列順序が自然に定義できるので､代数 F の包絡代数もこの枠組みに入る。この方法で、加群のグレブナー基底を議論することにより、両側加群のグレブナー基底の議論ができる。これを利用し、両側加群の計算や Hochschild cohomology の計算を行うことができた。

上記、（１）、（２）の結果は論文３に発表した。（３）、（４）、（５）の結果は論文２に発表した。

また、グレブナー基底の理論をモノイド代数に応用し、モノイドのホモロジー有限性について調べ､その結果は論文４に発表した。さらに、一般の書換えシステムの停止性問題、複雑度に関しての特徴付けが得られ、その結果は論文１に発表した。これは、書換えシステムの複雑度と Turing 機械の時間関数との関係を詳しく調べることで得られ、複雑度と計算量の間の関係を明らかにしたもので、計算論的立場からも、多くの示唆を与えるものとなった。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計６件）

① Yuji Kobayashi, The complexity of string rewriting systems, Theoretical Computer Science, 査読有, Vol. 438, 2012, pp. 1-12.

② Yuji Kobayashi, Gröbner bases and syzygies on modules over algebras based on well-ordered semigroups, International Journal of Pure and Applied Mathematics, 査読有, Vol. 64, 2010, pp. 457-489.

③ Yuji Kobayashi, Gröbner on algebras based on well-ordered semigroups, Automata, Formal Languages and Algebraic Systems, World Scientific, 査読有, Vol. 64, 2010, pp. 85-102.

④ Yuji Kobayashi, The homological finiteness properties left-, right- and bi-FP$_n$ of monoids, Communications in Algebra, 査読有, Vol. 38, 2010, pp. 1-12.

⑤ Yuji Kobayashi, Kaname Nakazawa, Yohei Kobayashi, 3D Conway's solitaire, Recreational Mathematics, 査読有, Vol. 35, 2010, pp. 193-201.

⑥ Yuji Kobayashi, Gröbner bases on projective bimodules and the Hochschild cohomology Part IV, RIMS Kokyuroku, 査読無, vol. 1655, 2009, pp. 132-139.

〔学会発表〕（計４件）

① Yuji Kobayashi, Term orders and the modular algorithms for Gröbner bases, 代数系および計算機科学基礎、２０１２年２月２２日、京都大学

② Yuji Kobayashi, A short history of repetition-free words, 代数と言語のアルゴリズムと計燦理論、２０１１年２月２３日、京都大学

③ 小林ゆう治、代数・書換え・計算、代数セミナー、２０１０年１２月２０日、城西大学

④ Yuji Kobayashi, The complexity of string-rewriting systems, 代数と言語のアルゴリズムと計燦理論、２０１０年２月１９日、京都大学

〔図書〕（計１件）

①Masami Ito, Yuji Kobayashi, Kunitaka Shoji, Automata, Formal Languages and Algebraic Systems, World Scientific, 2010, 244.

６．研究組織

(1)研究代表者

小林　ゆう治（KOBAYASHI YUJI）

東邦大学・理学部・訪問教授

研究者番号：７００３５３４３

(2)研究分担者

該当なし

(3)連携研究者

該当なし