

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年6月15日現在

機関番号：32670
 研究種目：基盤研究（C）
 研究期間：2009～2011
 課題番号：21540049
 研究課題名（和文）ベクトル束の評価写像を用いた誤り訂正符号の研究
 研究課題名（英文）RESEARCH ON THE ERROR-CORRECTING CODES BASED ON THE EVALUATION MAPS OF VECTOR BUNDLES

研究代表者
 中島 徹 (NAKASHIMA TORU)
 日本女子大学・理学部・教授
 研究者番号：20244410

研究成果の概要（和文）：情報を送信する際に生じた誤りを訂正して元のデータを復元する為の数学的手法は誤り訂正符号と呼ばれる。当課題では、代数多様体上のベクトル束と呼ばれる幾何学的対象を用いて定義される新しい型の誤り訂正符号の基本的性質に関する研究を行った。その結果、 α -弱安定性と呼ばれる性質をもつベクトル束を用いると高い性能をもつ符号を構成出来る事が明らかになった。

研究成果の概要（英文）：The mathematical technique of correcting the errors in the process of transmission of information is called the error-correcting codes. In the present research, we introduced a new type of error-correcting codes defined by means of the geometric objects called vector bundles on an algebraic variety and investigated their fundamental properties. As a result of our research, we have shown that it is possible to construct good codes from vector bundles which satisfy a condition called weak α -stability.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	900,000	270,000	1,170,000
2010年度	700,000	210,000	910,000
2011年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総計	2,400,000	720,000	3,120,000

研究分野：代数幾何

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：代数幾何符号、ベクトル束

1. 研究開始当初の背景

(1) 情報を送信する過程に於いては通常誤りが生じるが、誤り訂正符号はこれらの誤りを訂正して送信された元のデータを復元する為の数学的手法である。誤り訂正符号の性能は、長さ、次元、最小距離の3つのパラメータによって決定される。符号理論の重要な目的の一つは符号のパラメータがどのような値をとり得るかを決定する事である。

Goppa によって有限体上定義された代数曲線とその因子から幾何学的方法によって符号が構成出来る事が初めて示された後、代数幾何符号の理論は著しい発展を遂げてきた。特にパラメータの漸近的挙動に関しては Goppa 符号は高い性能を持つ事が知られている。

(2) Goppa 符号は現在では様々な方向に一般化されている。有限体上定義された任意次元の射影代数多様体 X の上の直線束 L からそ

の切断の評価写像の像として定義される符号は射影的 Reed-Muller 符号と呼ばれる。S.Hansen は、多様体上の交点理論を射影的 Reed-Muller 符号のパラメーターの決定に利用するという画期的なアイデアを導入した。特に線織曲面の場合に階数 2 のベクトル束の性質を用いてパラメーターの決定を行った。

(3) 当課題の代表者である中島は、平成 18 年度から平成 20 年度にかけて科学研究費補助金基盤研究 C の補助を受けて、相対的 Reed-Muller 符号と呼ばれる代数幾何符号の研究を行った。この符号は、射影的 Reed-Muller 符号の一般化であり、曲線 C 上のベクトル束 E に付随する射影束 $P(E) \rightarrow C$ の閉部分多様体とその上の直線束から定義される。この研究の結果、 E の安定性と呼ばれる幾何学的性質が相対的 Reed-Muller 符号の性能と非常に密接に関係している事が明らかになった。特に、Hansen の結果を高階のベクトル束の場合にまで一般化し、符号のパラメーターを決定する事に成功した。

(4) 誤り訂正符号の理論では、一ヶ所に集中して発生する誤り(バースト誤り)に対処する為の方法として、送信するデータの順番を適当に変更するインターリーブング(交錯法)と呼ばれる技術が以前から知られていた。曲線上の代数幾何符号の場合のインターリーブングは、同一の直線束幾つかの直和に対する評価写像の像として解釈できる事が Brown-Minder-Shokollahi によって指摘されていた。より一般に、V.Savin によってベクトル束の評価写像を用いて新しい型の代数幾何符号が導入された。特に、ベクトル束 E が弱安定性と呼ばれる性質を持つ場合には符号の次元や最小距離等のパラメーターが計算可能になる事が証明された。また、Savin はこの様にして構成された符号を用いて送信されたメッセージが誤りを含む時、元のデータを復元する為の復号法アルゴリズムも与えている。

2. 研究の目的

1 で述べた中島による相対的 Reed-Muller 符号と Savin の定義した符号は、共にベクトル束を用いた符号であるという共通点を持つ。従来の代数幾何符号は直線束の評価写像を用いて定義されてきたが、高階のベクトル束から定義される符号の研究は殆ど成されていなかった。ベクトル束は直線束と異なり階数とチャーン類という 2 種類の不変量を持っている為に符号を構成する際の自由度が大きい。その為、もしベクトル束から代数幾何的方法によって誤り訂正符号を構成出来れば、その様な符号は従来の代数幾何符号よりも高い性能を備えている事が期待され

た。そこで、我々は有限体上定義された任意次元の代数多様体上のベクトル束を用いて代数幾何符号を構成し、その基本的性質を研究する事を目的として本課題を計画した。具体的には、当課題に於いて以下に述べる様な目標を設定した。

(1) ベクトル束の弱安定性の一般化

Savin によって導入された曲線上のベクトル束の弱安定性の概念は符号のパラメーターの計算に有効である。しかし、符号の最小距離の評価式は、より強い条件を課しても可能である為、我々は弱安定性概念を一般化した安定性条件を満たすベクトル束を考え、それらから構成される符号の性質を研究する事を課題とした。

(2) 高次元ベクトル束符号の研究

Savin が曲線の場合に定義した符号は任意次元の射影代数多様体に一般化が可能である。我々は、有限体上定義された非特異射影代数多様体 X とその上のベクトル束 E が与えられた時、 E の大域切断の X の有限個の有理点での評価写像の像として、ベクトル束符号 $C(X, E)$ を定義し、その基本的性質の研究する事を考えた。曲線の場合と異なり、符号のパラメーターの計算の為に E の安定性は有効ではなくなってしまう。その為、我々は安定性に代わる条件を設定し、高次元でのベクトル束符号のパラメーターの決定する事を課題とした。

(3) ベクトル束符号の復号法

曲線上の弱安定なベクトル束から定まる符号に対して Savin が提案した符号の復号アルゴリズムを用いた場合、訂正可能な誤りの個数が最小距離の満たす不等式から期待される理論値よりも小さくなってしまふ事が分かる。これは Savin の復号アルゴリズムが最良のものではない可能性を意味している。そこで、我々は別の代数幾何的手法に基づいて、より効率的な復号アルゴリズムを発見する事を課題とした。

3. 研究の方法

当課題では、以下の様な方法を用いて研究を行った。

(1) ベクトル束の Severi 不変量

Savin によって導入された曲線上のベクトル束の弱安定性は、ベクトル束の部分直線束の次数に関する不等式で定義される。一方、ベクトル束の分野に於いて現れる Severi 不変量と呼ばれる値を用いると、弱安定性概念の一般化が可能である。そこで、この様な一般化された弱安定性を満たすベクトル束から定義される符号の研究を行おうと考えた。

(2) ベクトル束の Seshadri 定数

S. Hansen による代数幾何符号に於いては、直線束の交点数を評価する為に通常の ample よ

りも弱い nef (数値的正) と呼ばれる条件が重要な役割を果たす。より一般に高階のベクトル束 E に対しても、付随する射影束 $P(E)$ の不変直線束を用いて nef 条件を定義出来る。直線束が nef であるかどうかは、Seshadri 定数と呼ばれる値によって判定可能である事が知られていた。そこで我々はベクトル束に対して Seshadri 定数の概念を用いて nef 条件を判定し、得られた符号のパラメーターを決定しようと考えた。

(3) 高次元 Cayley-Bacharach 条件

代数曲面上の線形系に関する Griffith-Harris の定理に現れる Cayley-Bacharach の条件は高次元の代数多様体の 0 次元部分スキームに対しても一般化する事が可能である。一方 Gold-Little-Shenk 達は、射影空間の場合の Cayley-Bacharach の条件を符号理論に応用した。一方、S. L. Tan は、Griffith-Harris の定理を任意の非特異射影多様体にまで一般化した。Tan の定理に於いては、直線束の very ampleness を更に一般化した d -very ampleness と呼ばれる高次の正值性条件が現れる。特に d -very ampleness を満たす直線束と Cayley-Bacharach 条件を満たす 0 次元部分スキームから Serre 対応を用いて階数 2 のベクトルを構成する点が証明の鍵である。我々はこの結果を正標数の体上のベクトル束に適用すれば、代数幾何符号の理論に適用できるのではないかと考えた。

(4) 正標数での Bogomolov 型不等式

標数 0 の閉体上定義された非特異射影多様体上の半安定ベクトル束の階数とチャーン類の間には、Bogomolov 不等式と呼ばれる関係式が成立する。一方、正標数ではこの不等式は一般に成立しないが、適当な条件の下で類似の不等式が成立する事が知られている。この不等式を用いて Langer は、代数曲面上の安定束を十分豊富な曲線への制限が安定になる事を証明した。我々は、Bogomolov 型不等式を用いて曲面上の安定束を曲線に制限する事によって曲線上の弱安定ベクトル束を一般化したベクトル束の存在を示す事が出来るのではないかと考えた。

4. 研究成果

当課題では、3. で述べた方法を用いてベクトル束から定まる代数幾何符号の研究を行い、以下の様な成果を得た。

(1) ベクトル束の零点から定まる符号

代数幾何符号の構成に於いて、代数多様体 X 上の直線束の切断を評価する有理点の集合 P としては通常 X の有理点全体の集合を取る。しかし、 P に何らかの幾何学的な条件を課すと符号のパラメーターの計算が容易になる場合がある。実際 Gold-Little-Shenk の研究

によって、 P が射影空間の超曲面の完全交差である場合には符号の最小距離の下からの評価式が得られている。超曲面の完全交差は直線束の直和の切断の零点集合である事から、我々はより一般に P として射影多様体上のベクトル束の切断の零点集合になる場合を考察した。その為にまず平面の線形系に関する古典的な Cayley-Bacharach 条件を拡張し、任意次元の代数多様体の 0 次元部分スキーム P に対して高次 Cayley-Bacharach 条件を定義した。次に P がこの条件を満たす時には符号の最小距離が下から評価出来る事を証明した。我々はこの結果と S. -L. Tan の定理を用いて、直線束が d -very ampleness と呼ばれる高次の正值性条件を持つときには符号の最小距離が下から評価出来る事を証明した。上に述べた結果を射影多様体の foliation (即ち接束の部分束) の特異点に対して応用すると、Campilo 達が射影平面の場合に得た結果の高次元への一般化が得られる。また、研究代表者の中島が過去に行った研究結果から、正標数の体上定義された代数曲面 S 上の直線束 L に対して、その随伴束 L が d -very ample となる為の十分条件が得られている。そこで、我々は上に述べた結果を代数曲面上の foliation の特異点の場合に応用し、符号のパラメーターを決定する事に成功した。

(2) 高次元ベクトル束符号

Savin が定義した曲線上のベクトル束を用いた符号の任意次元への一般化を考察した。任意次元の射影代数多様体 X 上のベクトル束 E から新しい型の代数幾何符号 $C(X, E)$ を定義し、ベクトル束符号と名付けた。 X が曲面で E の階数が 2 の場合にはこの様な符号は Bouganis-Coles によって定義された符号に一致するが、 X が 3 次元以上の場合には我々の符号はこれまでになかった新しい型の符号である。我々は任意次元の非特異射影多様体上のベクトル束符号のパラメーターに関する研究を行い、以下の様な結果を得た。

まず、 E の階数が多様体の次元 n に等しいときには、適当な仮定の下で $C(X, E)$ の最小距離が下から E の n 次チャーン類の明示式で評価される事を証明した。これは Bouganis-Coles の結果の一般化になっている。次に、ベクトル束 E が適当な nef 条件を満たす時、 $C(X, E)$ の最小距離が E の Seshadri 定数を用いて下からの評価が出来る事を証明した。これは S. Hansen が直線束の場合に証明した結果を任意階数のベクトル束にまで拡張するものである。

(3) 曲線上のベクトル束符号

Savin の導入した曲線上のベクトル束に対する弱安定性の概念を一般化し、与えられた有理数 α に対して α -弱安定性の概念を定義した。 α が負の値を取るときにはこの概念は弱安

定性より強い条件である。我々は、曲線 X 上の α -弱安定なベクトル束の存在の問題と、 E から定まるベクトル束符号 $C(X, E)$ の性質に関する研究を行い、以下の様な結果を得た。ベクトル束の Severi 不変量に関しては向井-酒井の定理と呼ばれる不等式が知られている。我々は、この不等式を用いる事によって α -弱安定なベクトル束符号の存在に関する必要条件が導かれる事を示した。この結果、対応するベクトル束符号のパラメーターが満たすべき必要条件を得る事が出来た。次に、ベクトル束 E に関する α -弱安定性の仮定の下で符号 $C(X, E)$ の長さ、次元、最小距離等のパラメーターが計算が可能である事を証明した。また、Savin による復号法が α -弱安定なベクトル束の場合にも適用可能である事を証明した。この結果により、 α -弱安定なベクトル束の符号理論に於ける重要性が明らかになった。最後に、曲線間の有限射による順像として定まるベクトル束が適当な仮定の下で α -弱安定性となる事が分かった。また、曲線のフロベニウス写像による順像として α -弱安定なベクトル束の例を具体的に構成し、それらが定義する符号のパラメーターの計算を行った。

(4) α -安定束の制限定理

与えられた曲線の上にどれ位 α -安定なベクトル束が存在するかという問題は符号の漸近的問題とも関連して非常に重要である。我々は、代数曲面 S 上に曲線がある場合にこの問題を考察した。その結果、 S 上の十分豊富な因子の m 倍に線形同値な曲線への安定束の制限は、 m が α に依存するある定数より大きい時には α -安定なベクトル束になる事を証明した。この定理は、A. Langer によって得られていた正標数の代数閉体上の安定ベクトル束に対する制限定理と類似の手法を用いて証明され、特に Bogomolov 型不等式が証明の要となる。我々の結果によって、曲線上の α -安定束の存在は曲面上の安定束の存在に帰着される事になる。射影平面上の安定束の存在の証明は比較的容易である為、我々の結果を用いて平面曲線上に多くの α -安定なベクトル束の例を構成する事ができた。特に Hermite 曲線上のベクトルを用いてパラメーターの評価が可能で多くの符号の例を構成する事に成功した。

(5) 研究の位置づけと今後の展望

現在、ベクトル束符号の研究は当課題以外にも E. Ballico 等によって研究が進められている。一方、当研究では Langer の理論等の代数幾何に於けるベクトル束の最先端の結果を符号理論に応用して新しい結果を得ているという点に特色がある。今後、当研究の成果によってベクトル束の幾何学と符号理論の関係が解明される事が期待される。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 4 件)

① T.Nakashima,
Relative Reed-Muller codes on projective bundles, Semin. Congr. 21(2010), 177-185
査読有

② T.Nakashima
AG codes from vector bundles, Des. Codes Cryptogr. 57(2010), 107-115
査読有

③ T.Nakashima
Codes associated to the zero-schemes of sections of vector bundles, Finite Fields Appl. 15(2009), 731-737
査読有

④ T.Nakashima
Minimum distance of relative Reed-Muller codes, Appl. Algebra Engrg. Comm. 20(2009), 123-132
査読有

[学会発表] (計 5 件)

① T.Nakashima
Special components of the moduli of stable sheaves, Barcelona 大学代数幾何セミナー、2011年9月23日

② 中島 徹
Donaldson-Thomas invariants of certain Calabi-Yau threefolds, 九州大学代数幾何セミナー、2011年6月6日

③ 中島 徹
Calabi-Yau manifolds in projective bundles and Donaldson-Thomas invariants, 大阪大学複素幾何セミナー、2010年11月12日

④ 中島 徹
Vector bundles and coding theory, 九州大学代数幾何学研究集会、2010年2月23日

⑤ 中島 徹
Vector bundles and algebraic-geometric codes, 広島大学代数学セミナー、2009年2月12日

6. 研究組織

(1) 研究代表者

中島 徹 (NAKASHIMA TORU)
日本女子大学・理学部・教授
研究者番号：20244410

(2) 研究分担者

なし