

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 1 月 10 日現在

機関番号：34504

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2009～2011

課題番号：21540055

研究課題名（和文） 代数多様体の構造とユニポテント幾何

研究課題名（英文） Structure of algebraic varieties and unipotent geometry

研究代表者

宮西 正宜 (MIYANISHI MASAYOSHI)

関西学院大学・数理科学研究センター・客員研究員

研究者番号：80025311

研究成果の概要（和文）：

アフィン代数多様体上のベクトル場や 3 次元アフィン代数多様体上の  $\mathbf{A}^1$ -ファイブレーションや  $\mathbf{A}_*^1$ -ファイブレーションの性質を加法群  $G_a$  や乗法群  $G_m$  の作用と関連付けて研究し成果を上げた。また、特異点をもつ正規アフィン代数曲面の特異点の性質を調べた。これらの研究成果によって、3 次元アフィン代数多様体の構造を変形理論を通して研究する新しい分野が見えて来た。

研究成果の概要（英文）：

Research on vector fields on affine varieties and properties of  $\mathbf{A}^1$ -fibrations and  $\mathbf{A}_*^1$ -fibrations on affine threefolds was successfully conducted. Properties of singular points on affine normal surfaces are also explored. Through this research, a new scope of studying the structure of affine threefolds via deformation theory is envisioned.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009 年度	700,000	210,000	910,000
2010 年度	700,000	210,000	910,000
2011 年度	700,000	210,000	910,000
年度	0	0	0
年度	0	0	0
総計	2100,000	630,000	2730,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：代数幾何

## 1. 研究開始当初の背景

(1) ホモロジー平面や位相的に可縮な代数曲面の研究においてアフィン直線  $\mathbf{A}^1$  の存在が曲面の性質を定める重要な要素であることが分っていた。アフィン平面  $\mathbf{A}^2$  の特徴づけはその一例であるが、アフィン直線がどれだけ存在するかを測る指標として Makar-Limanov 不変量が導入されて、有用性が確か

められた。

(2) 代数群の代数多様体上への作用を研究する際に、加法群  $G_a$  や乗法群  $G_m$  の作用の重要性は認識されていた。また、それらの微少変換としてのベクトル場、とくに、加法群のアフィン多様体への作用の同値な言い換えである、座標環上の局所べき零導分については

幾何学的立場を含めて様々な観点から精細な研究がなされ、その重要性が認識されていた。

(3) アフィン代数多様体の研究には基本群やコホモロジー群など位相幾何学の理論が有効に応用できることが分っていた。特異点の近傍における局所基本群と、境界をもつ代数多様体（したがって、開代数多様体）の基本群との類似性も指摘されていた。

## 2. 研究の目的

(1) 局所べき零導分や局所有限導分（代数的導分）をもつ代数多様体の構造の記述とアフィン空間上の局所有限導分の分類。また、アフィン代数多様体上のベクトル場に代数幾何学的条件を付してその性質を調べる。

(2) 3次元アフィン代数多様体が  $A^1$ -ファイブレーションや  $A^1_*$ -ファイブレーションを持つ場合にその構造を記述する。アフィン代数曲面の場合に成立することがらが高次元の場合にどこまで一般化できるかを調べる。

## 3. 研究の方法

(1) アフィン代数多様体上のベクトル場は代数群の微少変換という意味を超えて、導分としての性質を調べることができる。微分作用素として、代数幾何に解析的手法を導入する。代数多様体上への群作用と可換なベクトル場と商多様体上のベクトル場との比較なども調べる。

(2) 3次元アフィン代数多様体上の  $A^1$ -ファイブレーションや  $A^1_*$ -ファイブレーションはファイバー次元が1で、パラメータ多様体が代数曲面になる。特異ファイバーとパラメータ曲面上の特異ファイバー軌跡や特異点の関係から3次元多様体の構造が分る。代数曲面上の結果を3次元代数多様体の場合に一般化することを試みる。

(3)  $A^1$ -ファイブレーションや  $A^1_*$ -ファイブレーションが加法群  $G_a$  や乗法群  $G_m$  の商射として得られる条件を求める。一般次元の代数多様体の場合には差異が生じる。

(4) アフィン代数多様体の枠組みの中で代数的位相幾何学が有効に使える。とくに、コホモロジーが消滅しているコホモロジー曲面上の特異点の数とその性質は強い制限を受けている。これらを解明する。

(5) トーリック代数幾何はその枠組みが確立しているが、アフィン空間やユニポテント群の作用を対象とする代数幾何には克服すべき問題が多く残されている。これらの問題を定式化し、解決するための手段を開発することも大きな目的である。

## 4. 研究成果

(1) 上記研究の方法の(1)に関連して、局所有限導分の一般的性質を記述し、それによって多項式環上の局所有限導分の一部を分類することができた。成果は発表予定（印刷中）のものもある。（論文①，③，⑤，⑥）

(2) 3次元アフィン代数多様体上の  $A^1$ -ファイブレーションについて、それがいつ  $G_a$  の作用による商射となるか、特異ファイバー、パラメータ代数曲面上の特異ファイバーの軌跡、その他について、基礎理論を完成し発表した。（論文②）これによって、 $A^1$ -ファイブレーションの deformation を考えるなどの次の目標が定まってきた。

(3) 3次元アフィン代数多様体上の  $A^1_*$ -ファイブレーションについて、それがいつ  $G_m$  の作用による商射となるか、特異ファイバーの分類などの結果とともに、位相的可縮3次元代数多様体の構成への応用などについて論文を完成している。（R.V. Gurjar, M. Koras, 増田佳代, 宮西正宜, P. Russell,  $A^1_*$ -fibrations on affine threefolds, to appear in the proceedings of the AAG, Osaka 2011. 下記の(7)で述べる Proceedings に収録される。）

(4) 2次元のジャコビアン予想に関連して、アフィン平面  $A^2$  の自己準同型写像によって、線形束の一般ファイバーがどのような特異点をもつ曲線に写されるかを調べた。（論文⑧）

(5) 正標数の場合に代数曲面のフロベニウス自己準同型写像を分割するような代数曲面について調べた。(論文④)

(6) 離散的付値環上の2変数多項式環への加法群の作用を分類した。(論文⑦)

(7) 2011年3月3日-6日の期間、関西学院大学大阪梅田キャンパスを使って、「Conference on Affine Algebraic Geometry」という国際研究集会を開催した。11名の外国人参加者があった。会議の報告集はProceedings of the conference on affine algebraic geometry, Osaka 2011として、World Scientific Publ. Co.から2013年に出版する予定である。研究分担者の増田佳代が編集代表を務めている。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計8件)

① 増田佳代, 宮西正宜, Algebraic derivations on affine domains, 査読有, to appear in the CAAG proceedings, 2012

② R. V. Gurjar, 増田佳代, 宮西正宜,  $\mathbf{A}^1$ -fibrations on affine threefolds, J. pure and applied algebra, 査読有, Vol. 216, 2012, 296-313.  
doi:10.1016/j.jpaa.2011.06.013

③ 増田佳代, Equivariant derivations and additive group actions, The Russell Festschrift, 査読有, CRM Proceedings and lecture notes, Vol. 54, Amer. Math. Soc., 2011, 231-242

④ 宮西正宜, Frobenius sandwiches of affine algebraic surfaces, Affine algebraic geometry, The Russell Festschrift, 査読有, CRM Proceedings and lecture notes, Vol. 54, Amer. Math. Soc., 2011, 243-260

⑤ 増田佳代, Homogeneous locally nilpotent derivations having slices and embeddings of affine spaces, J. Algebra, 査読有, Vol. 312, 2009, 1719-1733,  
doi:10.1016/j.jalgebra.2008.12.012

⑥ 増田佳代, 宮西正宜, Lifting of locally nilpotent derivations under finite homomorphisms, Tohoku Math. J, 査読有, Vol. 61, 2009, 267-286

⑦ 宮西正宜, Additive group scheme actions on the integral schemes defined over discrete valuation rings, J. Algebra, 査読有, Vol. 322, no. 9, 2009, 3331-3344  
doi:10.1016/j.jalgebra.2008.02.018

⑧ P. Cassou-Nogues, 宮西正宜, Smoothness of the images of the members of a linear pencil under an endomorphism of the affine plane, J. Pure Appl. Algebra, 査読有, Vol. 213, no. 5, 2009, 711-723  
doi:10.1016/j.jpaa.2008.09.002

[学会発表] (計12件)

① 宮西正宜, ホモロジー平面と関連する話題, 日本数学会秋季総合分科会企画特別講演, 信州大学, September 30, 2011.

② 宮西正宜, Singularities of  $\mathbf{Z}$ -homology planes of general type, Affine algebraic geometry, Umeda-Osaka, September 2, 2011.

③ 宮西正宜, Kernels of regular vector fields on affine threefolds, Workshop on Complex-Analytic and Algebraic Trends in the Geometry of Varieties, Universite de Quebec a Montreal, Canada, August 16, 2011.

④ 宮西正宜, Unramified endomorphisms of algebraic surfaces, Affine algebraic geometry, Umeda-Osaka, March 4, 2011.

⑤ 宮西正宜, Unramified endomorphisms of algebraic surfaces, Workshops on algebraic geometry, complex dynamics and their interactions, IMS, National University of Singapore, Singapore, January 4, 2011.

⑥ 宮西正宜, Affine line fibrations on affine threefolds, Part II, Internat. Conference on commutative algebra and algebraic geometry CAAG2010, Indian Institute of Science, Bangalore, India, December 9, 2010.

⑦ 増田佳代,  $\mathbf{A}^1$ -fibrations on affine threefolds, Part I, Internat. Conference

on commutative algebra and algebraic geometry CAAG2010, Indian Institute of Science, Bangalore, India, December 9, 2010.

⑧増田佳代, Equivariant vector fields and invariant theory, Affine algebraic geometry, Umeda-Osaka, March 4, 2010.

⑨宮西正宜, Vector fields and invariant theory, Miniworkshop of algebra, National Taiwan University, Taiwan, January 19, 2010.

⑩宮西正宜, Generalized Jacobian problem for algebraic surfaces like the affine plane, A conference on automorphisms of affine spaces, Radboud University Nijmegen, July 6, 2009, The Netherland.

⑪増田佳代, Equivariant derivations and additive group actions, Affine algebraic geometry, A conference in honour of Peter Russell, June 1, 2009, McGill University, Canada.

⑫宮西正宜, Characteristic p phenomena in affine geometry, Affine algebraic geometry, A conference in honour of Peter Russell, June 1, 2009, McGill University, Canada.

[図書] (計 3 件)

①宮西正宜, 茨木俊秀, 現代数理入門, 関西学院大学出版会 (共編著), 2009, 282 頁

②宮西正宜, 代数学 1-基礎編, 裳華房, 2010, 278 頁

③宮西正宜, 代数学 2-発展編, 裳華房, 2011, 323 頁

[その他]

ホームページ等

宮西正宜

<http://www10.plala.or.jp/masamiyanishi/miya/>

増田佳代

<http://sci-tech.ksc.kwansei.ac.jp/~kayo/>

AAG(アフィン代数幾何学ホームページ)

<http://sci-tech.ksc.kwansei.ac.jp/~kayo/AAG.html>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

宮西 正宜 (MIYANISHI MASAYOSHI)

関西学院大学・数理科学研究センター・客員研究員

研究者番号 : 80025311

### (2) 研究分担者

増田 佳代 (MASUDA KAYO)

関西学院大学・理工学部・教授

研究者番号 : 40280416