

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年5月22日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2011

課題番号：21540058

研究課題名（和文） 積分不可能な接分布構造と多様体のトポロジー

研究課題名（英文） Nonintegrable tangent distributions and topology of manifolds

研究代表者

足立 二郎 (ADACHI JIRO)

北海道大学・大学院理学研究院・非常勤講師

研究者番号：20374184

研究成果の概要（和文）：接触構造と呼ばれる構造を持つ空間の性質について研究しました。接触構造とは、多様体と呼ばれる次元が一定の空間上で各点に次元の一つ小さい接空間を対応させるもので、最も積分不可能なものです。それは歴史的に光学と密接な関係を持つ幾何的な構造です。この接触構造の研究の新たな有効な道具として、接触円形手術というものをシンプレクティック円形ハンドルを構成することにより導入しました。これは、高次元や高階の接触幾何学への応用も期待できます。

研究成果の概要（英文）：I studied some properties of the so-called contact structures. A contact structure is a completely nonintegrable hyperplane field on a so-called manifold. I introduced a new notion of contact round surgery by constructing symplectic round handle. It is expected to be applied to the higher dimensional and higher order contact geometry.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2011年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：円形ハンドル，接触構造，エンゲル構造。

## 1. 研究開始当初の背景

最近20年ほどの間に、接触トポロジーは凄まじい発展を遂げました。過旋の概念、開本構造との対応は、その発展において、重要な役割を果たしました。その一方、接触構造とよく似たエンゲル構造はやっと各平行化可能な4次元多様体上での存在が示されたところで、今後の研究が期待される所でした。また接触構造においても、Niederkrugerによってプラスチックステューフェと呼ばれる高次元におけるシンプレクティック充

填可能性の障害が見つけれられ、高次元における過旋の概念への研究がまさに始まろうとしているところでした。

## 2. 研究の目的

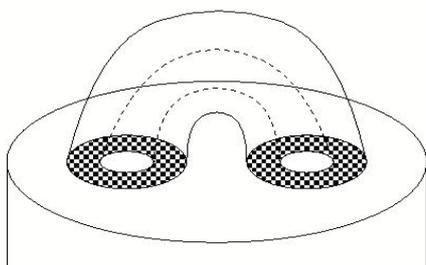
申請時における当初の研究目的は、エンゲル構造に対して、「過旋」の概念を導入することと、接触構造に対する「開本構造」のように全てのエンゲル構造に対応する構造を見つけることでした。しかし、接触構造にもエンゲル構造にも共通の理論を作るためには、

接触構造における考え方から作り直す必要性を感じました. すなわち開本構造は接触構造と非常に相性がよいのですが, エンゲル構造と接触構造の両方と相性がよい構造をもってエンゲル構造を研究するだけでなく, 接触構造も見直すことが出来るのではないかとことです.

### 3. 研究の方法

まず, エンゲル構造に関する開本構造になりそうな例を作りながら一般化を考えていきました. そうするうちに, 考えるべき物が接触構造に対する開本構造と少しずれてきたことに気づきました. 条件付の例は作れるのですが, 一般的なものがうまく構成できませんでした. 接触構造にもエンゲル構造にも自然な理論を作ることが自然に思えます.

ある時, 開本構造と円形ハンドルの類似性に気がつきました. 円形ハンドルとは通常のハンドルと円周の積で表される形のハンド



ルです. Vogel はエンゲル構造の存在証明を円形ハンドル分解を用いて行いました. しかし, ここでは分解ではなく, 円形ハンドルを使った手術の方法をとることにしました. まず 3次元の接触多様体の接触円形手術を定義し, 接触多様体の構成を考えました. そして, シンプレクティック円形ハンドルを一般の次元で考えることにより, 一般の奇数次元で接触円形手術を定義することが出来るようになりました.

また当補助金により, 2009年度の米国数理科学研究所での接触・シンプレクティックトポロジーのプロジェクトに参加することができ, Eliashberg, Etnyre, Honda, Niederkruger らの専門家たちと, 有益な議論を直接に交わすことが出来ました. 2011年度にはポーランドのウッチ大学で開催されたポーランド-イスラエル数学会に参加することができ, Niederkruger, Entov ら接触・シンプレクティック幾何学の専門家や, Zhitomirskii, Mormul, Dormitrz ら特異点や微分式系の専門家たちと議論を交わすことができました. これら, 最先端の研究の情報交換や専門家たちとの直接の議論は本研究課題に欠くことのできない大きな影響を与えました. 国内の研究者との議論や情報収集も当補助金により活発に行うことができました. このような比較的新しく活発に動いて

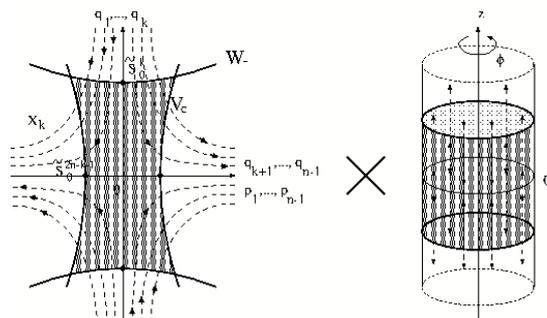
いる分野では, 直接の専門家との議論が研究には欠かせないと感じます.

当補助金により, コンピュータを一式購入しました. インターネットによる最新のプレプリントなどの情報収集や, e-mail を使った数学の議論など, 研究遂行に有用な道具として活用しました. また, 成果発表のための論文の作成や講演資料の作成などにも活用しました.

### 4. 研究成果

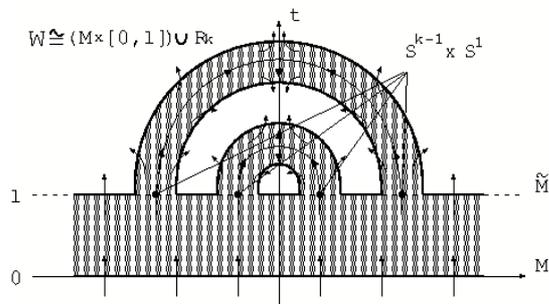
まず, 3次元接触多様体の接触円形手術を定義しました. これはシンプレクティック同境を使わずに3次元の言葉で定義しました. 指数1の接触円形手術は連結成分が2の横断的絡み目に沿って行われ, どのような横断的絡み目に沿っても行われます. しかし, 指数2の接触円形手術は常に行える訳ではありません. 凸トーラスで, 接触平面場がソリッドトーラスに拡張する障害が消えていなければなりません. 接触構造が過旋の場合, この障害を持つ場合があります. しかし, 接触構造に Lutz 捻りという変更を加えると障害を消すことができます. 全ての有向閉3次元多様体は3次元球面から指数1, 2の円形手術を何回か行って得られることが知られています (Asimov). よって, それらの円形手術を接触円形手術として行うことにより, Martinet の定理 (全ての有向閉3次元多様体上の接触構造の存在) の別証明が得られました. さらに, Lutz 捻りという操作も接触円形手術の組で表されることが示せ, 全ての有向閉3次元多様体上の全ての接触構造は, 標準構造を持つ3次元球面から指数1と2の接触構造の有限列で実現できることを得ました.

さらに, 一般の次元でシンプレクティック円形ハンドルを構成しました. このシンプレクティック円形ハンドルは, 全体で定義され



た Liouville ベクトル場を持っているので, シンプレクティック構造は完全形式です. Liouville ベクトル場は Morse-Bott 関数の勾配ベクトル場になっています. この Liouville ベクトル場は接着領域で内向きで横断的です. よって, シンプレクティック多様体の凸な接触型境界に接着されることとなります. また, シンプレクティック円形ハンドルのべ

ルト領域では Liouville ベクトル場は外向きに横断的です. よって新しい境界も接触型です. このように, 自明な同境にシンプレクティック化の構造を考えシンプレクティック円形ハンドルを接着することで接触円形手術を定義しました. 3次元の場合, この手術は先の手術と少し異なるのですが, どちらでも



Lutz 捻りと呼ばれる基本的な接触構造の変形を手術の組み合わせで表せることが分かりました. しかし, こちらの接触円形手術の短所は, シンプレクティック円形ハンドルの接着の枠が限定されるので手術の枠も限定されることです. したがって, 先の自由な構成の議論には使えません.

これらの結果は論文として発表すべく, 雑誌に投稿中です.

この接触円形手術は私独自のアイディアで, 国内外の研究者から興味をもたれています. 現在基礎を築き上げたところなので, これからこの分野に新たな風を吹き込むことが期待されます.

また, エンゲル構造への議論の拡張を目指して, エンゲル構造に関する相対的なダルブ一定理も本研究課題の一部として得ました. ここでは, エンゲル構造は接触構造よりもある意味で繊細であることが示されています. また, 接触幾何の言葉ではこれまでは明確には与えられていなかった例を与えているので, 国内外の特異点論研究者からは少しばかりの驚きをもって受け入れられています. この結果はすでに論文として発表されています.

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計4件)

- ① Jiro Adachi, Relative local equivalence of Engel structures, Math. Z., 査読有, 2012, on line, DOI: 10.1007/s00209-012-1026-8.
- ② Jiro Adachi, 円形手術と接触構造, 数理解析研究所講究録, 査読無, 1764 (2011), 139--148.
- ③ Jiro Adachi, Global Stability of special multi-flags, Israel J. Math.,

査読有, 179 (2010), 29--56.

- ④ Jiro Adachi, 4次元多様体の手術と Engel 構造, 数理解析研究所講究録, 査読無, 1664 (2009), 105--116.

[学会発表] (計11件)

- ① 足立 二郎, 相対的な Darboux 型の定理について, 第35回トポロジーセミナー (旧・伊豆セミナー), 2012年3月18日, 千葉県館山市.
- ② 足立 二郎, 円形手術から見た接触構造, 接触構造・特異点・微分方程式 およびその周辺, 2012年1月19日, 鹿児島大学.
- ③ Jiro Adachi, Contact round surgery and symplectic round handlebodies, 多様体の平面場と微分同相群 2011, 2011年11月3日, 東京大学玉原国際セミナーハウス.
- ④ Jiro Adachi, Generalizations of the Gray theorem, Israeli-Polish Mathematical Meeting, 2011年9月13日, Lodz, Poland.
- ⑤ 足立 二郎, 接触円形手術と斜交円形把手体, 特異点論とその応用, 2011年6月2日, 大分工業高等専門学校.
- ⑥ Jiro Adachi, 円形手術と接触構造, 実閉体上の幾何と特異点論への応用, 2010年12月3日, 京都大学数理解析研究所.
- ⑦ Jiro Adachi, Round surgery and contact structures, 葉層構造と微分同相群 2010, 2010年10月28日, 東京大学玉原国際セミナーハウス.
- ⑧ Jiro Adachi, A certain new surgery construction of contact 3-manifolds, 特異点と多様体の幾何学, 2010年9月17日, 山形大学
- ⑨ 足立 二郎, 円形手術と接触構造, 空間認識のための特異点論, 2010年6月4日, 三重県 伊勢市観光文化会館.
- ⑩ 足立 二郎, 接触構造と円形手術, 接触構造, 特異点, 微分方程式及びその周辺, 2010年1月29日, 北海道 洞爺湖文化センター.
- ⑪ Jiro Adachi, Engel geometry from a flexible viewpoint, Polish-Japanese Singularity theory working days, 2009年7月18日, Kazimierz Dolny, Poland.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

足立 二郎 (ADACHI JIRO)  
北海道大学・大学院理学研究院・  
非常勤講師  
研究者番号：20374184

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし