

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 22 日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2011

課題番号：21540060

研究課題名（和文） アティヤ類の局所化理論とその応用

研究課題名（英文） Localization theory of Atiyah classes and its applications

研究代表者

諏訪 立雄（SUWA TATSUO）

北海道大学・名誉教授

研究者番号：40109418

研究成果の概要（和文）：

(1) Atiyah 類の局所化に関しては、M. Abate, F. Bracci, F. Tovena との共同研究において次のような基礎理論を確立した：① 局所化に適した Atiyah 類の簡明な定義、② Cech-Dolbeault コホモロジー論の展開、③ 複素解析的 Thom 類の導入、④ Bott 型の消滅定理の証明。

(2) ベクトル束の準同型写像の退化問題に関し、Thom-Porteous 公式を退化集合に局所化する試みを大本 亨と開始した。これは Chern 類の Schur 多項式の普遍的局所化を構成するもので、ベクトル束の Thom 類の大幅な拡張である。

研究成果の概要（英文）：

(1) Concerning the localization theory of Atiyah classes, with collaboration of M. Abate, F. Bracci and F. Tovena, we established the following fundamental theories : ① a simple definition of Atiyah classes suitable for the localization theory, ② Cech-Dolbeault cohomology theory, ③ introduction of the complex analytic Thom class, ④ proof of a Bott type vanishing theorem in terms of Atiyah forms.

(2) Concerning the degeneracy loci problem of a homomorphism of vector bundles, with collaboration of T. Ohmoto, we started to try to prove the Thom-Porteous formula localized at the degeneracy loci. This is done by constructing a universal localization of a Schur polynomial of Chern. It is a vast generalization of the Thom class of a vector bundle.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2010年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度	0	0	0
年度	0	0	0
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数理系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：複素解析幾何、特性類の局所化、留数、チャーン類、アティヤ類、特異多様体、特異正則分布

1. 研究開始当初の背景

研究代表者は世界各地の研究者と特異多様体上のベクトル場の指数、複素解析的特異葉層構造の留数の研究を行った。これは Poincaré-Hopf の指数定理をモデルに、P. Baum-R. Bott, C. Camacho-P. Sad 等の理論をも含め統一的に発展させたもので Hermann 社からの単行本として集大成された。ここで用いられた方法、得られた結果は葉層構造のみならず次のような課題への応用、発展をみた：(1) 特異多様体の特性類、(2) Chern 類の留数、(3) 複素力学系への応用、(4) Thom 類等。

2. 研究の目的

前述のように、研究代表者は主として Chern 類を基にした特性類の局所化理論を展開し、特異葉層構造の留数理論およびその複素力学系への応用、特異多様体の特性類、Chern 類の留数理論およびその特異多様体の交叉理論への応用等の研究を行い、多くの成果を挙げて来た。これには Cech-de Rham コホモロジーに適合させた Chern-Weil 理論が重要な役割を果たした。特にこの理論の枠組みで定められる Thom 類は強力で、例えばこれを用いると、de Rham 複体に対する Lefschetz 不動点定理が簡明に証明出来る。

以上の課題の研究を継続する他、これらを Atiyah 類に対して考察する。この場合はより精密な複素解析幾何学的情報が得られるはずである

3. 研究の方法

特に Atiyah 類についてはつぎのように研究を実施する：

(1) Cech-Dolbeault コホモロジーを導入し、Atiyah 類の局所化理論を展開する。

(2) 特異葉層構造の留数理論において基本になるのは Bott 型の消滅定理である。Atiyah 類を用いた場合は積分可能条件なしに同様の消滅定理が成り立つことが証明出来るので、葉層構造より一般に特異分布の留数理論を展開し、複素力学系等への応用を図る。

(3) 正則ベクトル束の Atiyah 類の切断の組による局所化に付随した留数の構造を解明する。特異点集合の次元が“正しい”場合は本質的に Chern 類の場合と本質的に同じと

思われるが、そうでない場合には差異が現れ、これを調べることは交叉理論において大変興味深く重要と思われる。

(4) 複素解析的な Thom 類を導入しその応用、特に Dolbeault 複体に対する Lefschetz 不動点定理の幾何学的な簡明な証明を与える。さらに多様体が特異点を持つ場合への拡張を試みる。

4. 研究成果

特性類の局所化に関する従来からの研究を継続した。従来の局所化理論は Chern 類に基づくものであったが、特に本研究はこれを Atiyah 類を用いて新しい観点から発展させるものである。

(1) Atiyah 類の局所化に関しては、M. Abate, F. Bracci, F. Tovena との共同研究において次のような基礎理論を確立した：① 局所化に適した Atiyah 類の簡明な定義、② Cech-Dolbeault コホモロジー論の展開、③ 複素解析的 Thom 類の導入、④ Bott 型の消滅定理の証明。

特に上記 ④ は Atiyah 類を用いた場合には積分可能条件なしに成り立つことを証明した。これを用いて、葉層構造より一般に特異分布の留数理論を展開し、新しい Atiyah 留数を定め、具体的例についてもこれを求めた。これらは共著論文として纏められ、Revista Matematica Iberoamericana への掲載が確定している。

(2) ベクトル束の準同型写像の退化問題に関し、Thom-Porteous 公式を退化集合に局所化する試みを大本 亨と開始した。これは Chern 類の Schur 多項式の普遍的局所化を Cech-de Rham コホモロジーに適合させた Chern-Weil 理論を用いて構成するもので、ベクトル束の Thom 類の大幅な拡張であり、様々な発展、応用が期待される。

(3) 完全交叉多様体上のベクトル場に対し、多様体の法束の自然な枠を用いた新たな指数の定義を与えた。これは位相幾何学的に定義された GSV-指数、研究代表者等により Chern-Weil 理論を用いて定義された仮想指数とも一致しこれらの指数の新たな解釈、計算法を与える。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 3 件)

- ① M. Abate, F. Bracci, T. Suwa and F. Tovena, Localization of Atiyah classes, *Revista Matematica Iberoamericana*, 掲載確定 (査読有).
- ② T. Suwa, Residues of singular holomorphic distributions, IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics, Universite de Strasbourg, 掲載確定 (査読有).
- ③ T. Suwa, Cech-Dolbeault cohomology and the $\bar{\partial}$ -Thom class, *Adv. Studies in Pure Math.* 56, Math. Soc. Japan (2009), 321-340 (査読有).

〔学会発表〕(計 14 件)

- ① 諏訪立雄, Residue theoretical treatment of degeneracy loci problem, 複素解析的ベクトル場・葉層構造とその周辺, 2011 年 12 月 10 日 (招待講演), 龍谷大学 (京都市).
- ② T. Suwa, Residue theoretical treatment of degeneracy loci problem, Conference on Complex Analysis and Geometry - XX (招待講演), Levice Terme (イタリア).
- ③ T. Suwa, Bott-Chern revisited, The 6-th Kagoshima Algebra - Analysis - Geometry Seminar, 2011 年 2 月 (招待講演), 鹿児島大学 (鹿児島市).
- ④ 諏訪立雄, Residues in excessive dimension, 複素解析的ベクトル場・葉層構造とその周辺, 2010 年 11 月 (招待講演), 龍谷大学 (京都市).
- ⑤ 諏訪立雄, Excess intersections and residues in excessive dimension, 複素解析セミナー, 2010 年 11 月 (招待講演), 東京大学 (東京都).
- ⑥ T. Suwa, Perturbation des residus de Baum-Bott, Seminaire de Singularites, 2010 年 6 月 (招待講演), Universite de Provence (フランス).
- ⑦ T. Suwa, Residues of singular holomorphic distributions, Seminario di Analisi Complessa, 2010 年 6 月 (招待講演), Universita di Roma "Tor Vergata" (イタリア).
- ⑧ T. Suwa, Singular holomorphic distributions and Atiyah classes, The 5-th Kagoshima Algebra - Analysis - Geometry Seminar, 2010 年 2 月 (招待講演), 鹿児島大学 (鹿児島市).
- ⑨ T. Suwa, Singular holomorphic distributions and Atiyah classes, Singularity Seminar, 2010 年 1 月 (招待講演), 東京理科大学 (東京都).
- ⑩ 諏訪立雄, Singular holomorphic distributions and Atiyah classes, 複素解析

的ベクトル場・葉層構造とその周辺, 2009 年 12 月 (招待講演), 龍谷大学 (京都市).

- ⑪ T. Suwa, Localization of Chern and orbifold characteristic classes, *Geometry of Singularities*, 2009 年 9 月 (招待講演), Universitat Muenster (ドイツ).
- ⑫ T. Suwa, Classes de Thom intermediaires, Seminaire de Singularites, 2009 年 6 月 (招待講演), Universite de Provence (フランス).
- ⑬ T. Suwa, Residues of Chern classes, Seminar at IPMU, 2009 年 5 月 (招待講演), 東京大学 (柏市).
- ⑭ T. Suwa, Localization of Atiyah classes, The 4-th Kagoshima Algebra - Analysis - Geometry Seminar, 2009 年 2 月 (招待講演), 鹿児島大学 (鹿児島市).

〔図書〕(計 1 件)

- ① J.-P. Brasselet, J. Seade and T. Suwa, *Vector Fields on Singular Varieties*, Springer Lecture Notes no. 1987, Springer-Verlag 2009, 225 pages.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

諏訪立雄 (SUWA TATSUO)
北海道大学・名誉教授
研究者番号: 40109418

(2) 研究分担者

なし

研究者番号:

(3) 連携研究者

大本 亨 (OHMOTO TORU)
北海道大学・理学研究院・准教授
研究者番号: 20264400

岡 睦雄 (OKA MUTSUO)
東京理科大学・理学部・教授
研究者番号: 40011697

河澄 響矢 (KAWAZUMI NARIYA)
東京大学・数理科学研究科・准教授
研究者番号: 30214646

竹内 潔 (TAKEUCHI KIYOSHI)
筑波大学・物質科学研究科・准教授
研究者番号: 70281160

田島 慎一 (TAJIMA SHINICHI)
筑波大学・物質科学研究科・教授
研究者番号: 70155076

中村 弥生 (NAKAMURA YAYOI)
近畿大学・理工学部・講師
研究者番号：60388494

與倉 昭治 (YOKURA SHOJI)
鹿児島大学・理学部・教授
研究者番号：60182680

吉川 謙一 (YOSHIKAWA KENICHI)
京都大学・理学研究科・教授
研究者番号：20242810