

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 26 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2012

課題番号：21540061

研究課題名（和文） 複素空間形内のウエンテトーラスの高次元化

研究課題名（英文） Generalization of Wente torus in complex spaces forms

研究代表者

剣持 勝衛 (KENMOTSU KATSUEI)

東北大学・大学院理学研究科・名誉教授

研究者番号：60004404

研究成果の概要（和文）：複素空間形内の平均曲率ベクトル場が平行である曲面の局所構造を研究した。複素次元が 2 である場合、そのような曲面全体は 2 つの集合に分かれ、それぞれを定平均曲率型、一般型と呼ぶことにする。定平均曲率型の曲面は調和関数論と深く関係していることがわかった。一般型の曲面は、もしあれば、一次独立な 2 つの実数値関数に依存していることを証明した。関連する研究として、平均曲率が周期的である回転面について、その存在定理と構成法は既に得ているので、これらの結果を高次元に拡張するための準備として、与えられた連続関数を平均曲率にもつ回転超曲面の大域的存在を証明した。

研究成果の概要（英文）：Parallel mean curvature vector surfaces in complex space forms are studied. It is proved that, when the codimension of the immersion is two, the set of such surfaces is divided in two families, which are called cmc type and general type. The surface of cmc type depends on one real valued harmonic function and the one of general type, if it exists, depends on two independent real valued functions. Related to the theory of constant mean curvature surfaces, we studied also rotational surfaces with periodic mean curvature. In order to extend the research to higher dimension, we proved the existence theorem of rotational hypersurfaces with prescribed mean curvature function.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010 年度	800,000	240,000	1,040,000
2011 年度	800,000	240,000	1,040,000
2012 年度	700,000	210,000	910,000
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：微分幾何学、平均曲率一定曲面、平均曲率ベクトル

## 1. 研究開始当初の背景

ウエンテトーラスとは 3 次元ユークリッド空間内の平均曲率一定曲面でトーラスに位相同形である曲面を指す。この曲面は閉じた平均曲率一定曲面としては非自明な最初の

例で 1984 年ウエンテによりに発見された。この曲面の発見を契機として、3 次元ユークリッド空間内の平均曲率一定曲面の大域的研究が盛んになった。そこで、ウエンテトーラスを高次元定曲率空間に一般化しようと

する試みがなされた。余次元 2 で極小はめ込みの場合には多くの結果 (例えば、J. Chen & G. Tian, Minimal surfaces in Riemannian 4-manifolds, GAFA, 7(1997), 873-916) があり、特にはめ込みが一定ガウス曲率を持つと仮定すると本代表者と増田久弥氏との共同研究 (J. Reine Angew. Math. 523 (2000), 69-101) により完全な分類がなされている。

余次元 2 で平均曲率ベクトル場が平行な場合は D. Zhou との共同研究 (K. Kenmotsu & D. Zhou, The classification of the surfaces with parallel mean curvature vector in two-dimensional complex space forms. Amer. J. Math. 122 (2000), 295-317) で分類が終了したと思っていたが、平川の指摘 (S. Hirakawa, Constant Gaussian curvature surfaces with parallel mean curvature vector in two-dimensional complex space forms, Geom. Dedicata, 118 (2006), 229-244) により、我々の分類は不十分であることがわかり、そのギャップを埋めることが要求されていた。

余次元が 2 より大である場合は特殊な場合を除いて、殆ど研究されていなかった。

平均曲率ベクトル場が平行ではないが、その長さが一定である場合の研究の準備として、3 次元ユークリッド空間内で周期的平均曲率をもつ回転面の研究が本代表者により (Osaka J. Math. 40(2003), 687-696) 成されていた。

## 2. 研究の目的

2 次元曲面が高次元のリーマン空間にはめ込まれているとき、すなわち、余次元が高い場合の「平均曲率一定」の定義は定まっていない。自然な定義は「平均曲率ベクトルの長さが一定」であると思われるが、多くは研究されていない。この場合の曲面の研究を最終目標として、まず平均曲率ベクトル場が平行なはめ込みを調べることとする。このとき、外側の空間が実空間形のときは既に D. A. Hoffman, J. Diff. Geom. 8 (1973), 161-176, B. Y. Chen, Indiana Univ. Math. 22(1973), 656-666, S. T. Yau, Amer. J. Math. 96(1974), 346-366 等により研究されているが、彼らの結果は知られている曲面の研究に帰着されるというものであった。

平均曲率がゼロな曲面 (つまり、極小曲面) の高次元球面へのはめ込みについては、特に種数 0、種数 1 の場合は Barbosa, Chern, Kenmotsu 等により詳しく研究され、またこれらの複素版も十分に研究されている (たとえば、J. Eells & L. Lemaire A report on harmonic maps, Bull. London Math. Soc. 10(1978), 1-68, ---- & ----, Another report on harmonic maps, Bull. London Math. Soc. 20(1988), 385-524 を参照。特に、K.

Kenmotsu, On minimal immersions of  $R^2$  into  $S^N$ , J. Math. Soc. Japan, 28(1976), 182-191 と On minimal immersions of  $R^2$  into  $CP^n$ , J. Math. Soc. Japan, 37(1985), 665-682, ではトーラスの普遍被覆面である  $R^2$  が一定ガウス曲率を持つ場合の極小はめ込みが詳しく研究されているので、今回は極小という仮定を平均曲率ベクトルが平行という条件に置き換えて、高次元複素空間形内にはめ込まれた平均曲率一定の実 2 次元トーラスの全体像を理解することが最終目的である。そこで、まず複素 2 次元複素空間形でコンパクトな平均曲率一定曲面を研究することが本研究を始める動機であった。

3 次元ユークリッド空間内の回転面トーラスは 3 次元ユークリッド空間を複素ユークリッド平面に自然に埋め込むことにより複素平面内の回転トーラスと見なせる。より一般に複素 2 次元複素空間形内の回転面で平均曲率が周期的となる曲面をしらべ、はめ込みが 2 重周期的 (つまり、トーラスからのはめ込み) となる必要十分条件をえることを目標とする。

## 3. 研究の方法

平成 20 年度末までに本研究代表者により得られた余次元が 2 の場合の局所理論を応用し、2 次元球面と 2 次元トーラスからの平行な平均曲率ベクトル場をもつはめ込みに対する大域的研究をおこない、これらのはめ込み全体のモジュライを記述する。そのとき使われるのは、本研究代表者と山形大学の尾方教授との共同研究で得たケーラー角度関数が一定でない曲面の局所構造定理とホップの正則 2 次微分の拡張である。

次に、これまでの諸結果を高次元へ拡張する準備として、高次元複素空間形の正則断面曲率がゼロでない場合、このようなはめ込みに対する法束の分解を研究する。はめ込みの法束の研究は平行平均曲率ベクトル場をもつはめ込みが全実型で曲面が 2 次元球面に位相同型であるときは Opozda の研究 (Bull. Soc. Math. Belg. 40(1988), 207-244) がある。我々はこの Opozda の結果を曲面に対する全実型という仮定や大域的仮定なしで拡張する。正則断面曲率が恒等的にゼロであるときは、ユークリッド空間内の平行な平均曲率ベクトル場をもつ曲面は先に引用した Hoffman, Chen, Yau の結果により知られている曲面しかないので研究することはないが、複素射影空間や複素双曲型空間内の場合には興味ある現象がおきていることを示す。具体的には、ブラジルの Tribuzy と共同して、高次元複素空間形で正則断面曲率がゼロでない場合の曲面の法束の分解を研究する。2008 年 2 月にブラジルのマナウスで行った予備的研究では、はめ込みが全実型でないとは仮定す

ると、このような曲面は本質的には複素 5 次元の全測地的部分多様体に含まれることがわかった。次に、大域的研究を行うために、正則 2 次微分を発見することが重要でその一つはすでに前述の Opozda により得られているが、余次元が高い場合、Opozda のものとは異なる 2 次微分を発見して使う。この 2 次微分は余次元が 2 の場合は既に尾方により得られているので、それを高次元へ拡張する。

周期的平均曲率をもつ回転面の研究については、高次元の場合を含めて、まずそのような超曲面の存在から議論しなければならぬ。実際、実数全体で定義された連続関数  $H(s)$  に対し、それを平均曲率にもつ回転超曲面が大域的に存在することを証明しておかなければ問題すら設定できない。これに関して、本研究代表者はドイツの Dorfmeister との共同研究で  $H(s)$  が実解析的であるときは、それを平均曲率にもつ回転面超曲面が大域的に存在することを証明した。この存在定理を  $H(s)$  が連続関数の場合へと拡張する。この拡張では、与微分方程式系の第一積分が本質的であるが、これは既に証明してあるので、残るは常微分方程式系の特異初期値問題を連続関数の場合に示せばよい。この問題については、前に記した Zhou との共同研究 (Amer. J. Math. 122(2000)) で証明した補題 (Lemma 4.2) が役に立つと思われる。以上の研究を行うために、イタリアの ICTP、ドイツのミュンヘン工大、アウグスブルク大への各 1 週間の出張が必要で、国内では部分多様体の研究集会と日本数学会の年会、総合分科会への出席と山形大の尾方教授等との意見交換のための出張旅費が必要である。また、余次元 2 の場合の微分式系の計算において、ケーラー角度関数が一定でないとき、われわれのアイデアはその関数を座標の一つとして取ると、局所構造が見通しよく定まるというのであるがその証明において膨大なテンソル計算を必要とし、実際計算の途中で 5 変数 48 次の多項式が表れ、これの処理に最新版の数式処理ソフトによるテンソル計算が必要である。そのために高性能のコンピューターと大型のディスプレイが必要である。

またこの方面の参考文献を迅速にそろえたい。研究が当初計画どおりに進まないということは考えられない。実際、定数でないケーラー角度関数の取り扱いに熟知している本研究代表者と余次元が高い場合の法束の分解について深い造詣をもつ Tribuzy や Eschenburg との議論が可能だからである。これらの諸研究を行うために出張先で使う小型で軽量のコンピューターが必要である。

これまでの研究で平坦でない複素空間内の曲面が極小でなく、全実型でなく、かつ擬臍的でもないときは、外側の空間の次元が

おちて複素 5 次元複素空間形内の曲面と見てよいことがわかったので、平成 22 年度以降では次の 2 つの場合を詳細に研究する。ひとつは曲面が複素 5 次元複素射影空間  $CP^5$  内に含まれる場合である。まずこの場合の具体例を多く探す。次に、曲面が球面に位相同型であるとして、それらのモジュライを記述する、次に曲面がトーラスに位相同型な場合を扱う。次は複素双曲型空間  $CH^5$  の場合である。この場合は既に平川 (Geom. Ded. 118(2006), 229-244) により、ポアンカレ平面からの興味深いめ込みが発見されているが、トーラスからの平均曲率ベクトル平行なめ込みはまだ発見されていないので、もっとも興味深い場合である。

周期的平均曲率をもつ回転面の研究では 4 次元複素空間形内に拡張された回転面を考え、それらがまず周期的となるための条件を得、次にそれを使って具体例を求める。また外側の空間の正則断面曲率がゼロの場合は 3 次元ユークリッド空間内の曲面からの変形になっていることを示す。

これらの諸研究のつぎには、いよいよ本来の目的である、平均曲率ベクトル場の長さが一定で余次元 2 の場合の研究を行う。この場合は 4 次元実空間形内の曲面に対してすら満足な研究はないことを注意しよう。複素空間形内の曲面に関しては、平均曲率一定曲面の構成法として本研究代表者と山形大学の尾方教授との共同研究で得られた一般型曲面の局所構造定理の応用が有用である。実際、平均曲率ベクトル場が平行でないときに、その局所構造定理における第 1、第 2 基本形式の形をコダッチの方程式が満たすように変形して使うことにより具体例がえられるであろう。

#### 4. 研究成果

余次元 2 の場合：局所構造の解明は完全に成し遂げられた。実 2 次元リーマン多様体から複素 2 次元複素空間形への平均曲率ベクトル平行なめ込みを考える。そのとき、そのようなめ込みは、ケーラー角度関数が複素化第二基本テンソルの一つと関数関係をもつかどうかで 2 つのクラスに分け、その一つを定平均曲率型、他を一般型と命名する。本研究代表者の得た主結果は、(1) 定平均曲率型の曲面は一つの実数値調和関数と 3 個の実定数によって決定される。(2) 一般型の曲面は、もし存在すれば、2 つの一次独立な実数値関数と 1 つの実定数で決定される。また、これらの二つのタイプの曲面の具体的構成法も得た。

これらの結果は現在論文にまとめているが、主結果の証明に一番寄与した補題について述べる。複素空間形内の平均曲率ベクトル平行な曲面のケーラー角度関数を  $\alpha$ 、複素化

第二基本形式テンソルを  $a, c$  とする。このとき、はめ込みを 3 回続けて微分することにより、 $\alpha, a, \bar{a}$  の間に関数関係があることが示される。この関係式は具体的に書き下せるが、式は数十万の項からなる 48 次の多項式である。数式処理ソフトを用いてこの多項式を解析した。最初はなかなか結果がでなかったが、そのソフトを最新版にし、コンピュータを最新、最強のものに更新したとき、この式の因数分解がコンピュータによってなされた。その因数分解式から、考察しているはめ込みを 2 つの型、定平均曲率型と一般型、に分けるというアイデアが生まれた。

余次元が 3 以上の場合、余次元制限定理や、大域的結果をいくつか得たが、これらの結果はその後 Tribuzy 等により、更に一般的な空間の場合に拡張された。

関連する研究として、高次元ユークリッド空間内で与えられた連続関数を平均曲率にもつ回転超曲面の大域的存在について埼玉大学の長澤教授と共同研究を行い、日本数学会や部分多様体研究会でその成果を発表した。その論文は現在ある雑誌に投稿中である。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

① 劔持 勝衛 平均曲率一定曲面論の新展開、部分多様体論・湯沢 2012 記録集、査読無、2013 年 3 月、57-61 ページ、  
<http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tasaki/uzawa/yuzawa2012.html>

② 劔持 勝衛 与えられた関数を平均曲率にもつ回転超曲面の大域的存在、部分多様体論・湯沢 2011 記録集、査読無、2012 年 3 月、13-16 ページ、  
<http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tasaki/uzawa/yuzawa2011.html>

③ J. Dorfmeister and K. Kenmotsu, Rotational hypersurfaces of periodic mean curvature, Differential Geometry and its Applications, 査読有, 27 巻 2009, 702-712 ページ, DOI:10.1016/j.difgeo.2009.03.010

[学会発表] (計 8 件)

① 劔持 勝衛 平均曲率一定曲面論の新展開、研究集会 部分多様体論・湯沢 2012、2012 年 11 月 23 日、新潟県越後湯沢町

② 劔持 勝衛、長澤壯之、与えられた関数を平均曲率に持つ Euclid 空間内一般化された回転超曲面の大域的存在について、日本数学会秋季総合分科会 2012 年 09 月 18 日、福岡市

③ 劔持 勝衛 On the global existence of rotational hypersurfaces of prescribed

mean curvature、Northeastern Univ. Dept. Math. 2012 年 06 月 14 日、瀋陽市 中華人民共和国

④ 劔持 勝衛 複素空間形内の平均曲率ベクトル平行曲面、仙台小研究集会、2012 年 3 月 17 日、東北大学・大学院理学研究科、仙台市

⑤ 劔持 勝衛 Surfaces with parallel mean curvature vector in the complex hyperbolic plane revisited, The international meeting on Differential geometry and partial differential equations, 2011 年 8 月 18 日、Fortaleza ブラジル

⑥ 劔持 勝衛、On the mean curvature of the periodic surfaces of revolution、University of Lisbon, Dept. Math. 2010 年 5 月 11 日、Lisbon ポルトガル

⑦ 劔持 勝衛、On the classification of the surfaces with parallel mean curvature vector in two dimensional complex space forms、Sun Yat-sen Univ. Dept. Math. 2009 年 12 月 9 日、広州市 中華人民共和国

⑧ 劔持 勝衛、複素 2 次元複素空間形内の平行平均曲率ベクトルをもつ曲面の分類について、島根大学微分幾何学小研究集会 2009 年 12 月 11 日、松江市

[図書] (計 1 件)

①若山正人 編、可視化の技術と現代幾何学、岩波書店、2010 年、1-46 ページ

[その他]

ホームページ等

<http://www.math.tohoku.ac.jp/~kenmotsu>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

劔持 勝衛 (KENMOTSU KATSUEI)  
東北大学・大学院理学研究科・名誉教授  
研究者番号：60004404

### (2) 研究分担者

( )

研究者番号：

### (3) 連携研究者

( )

研究者番号：