

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年5月10日現在

機関番号：32689

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2011

課題番号：21540075

研究課題名（和文） Coarse 幾何学におけるコホモロジー次元論

研究課題名（英文） Cohomological dimension theory in coarse geometry

研究代表者

小山 晃（KOYAMA AKIRA）

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号：40116158

研究成果の概要（和文）：

Coarse 幾何学における次元論を主に asymptotic 次元論の立場で研究を進めたが、埋蔵問題の重要性に行き着き、「どのような  $n$  次元コンパクト距離空間が  $n$  個の 1 次元コンパクト距離空間の積空間へ埋蔵することが可能か」を様々な角度から研究を進め、埋蔵可能な  $n$  次元多様体及び一般多様体の幾何的構造をその 1 次元コホモロジー群の整数加群としての階数から決定することを試みた。また、一般の  $n$  次元コンパクト距離空間  $X$  についても、その判定条件を  $n$  次元チェックコホモロジー群の自明性と 1 次元チェックコホモロジー群の階数の関連から研究した。

研究成果の概要（英文）：

As we started to investigate coarse geometry from the viewpoint of asymptotic dimension theory, we faced an important problem related to embedding problems. Namely, we investigated the problem what kind of  $n$ -dimensional compact metric spaces can be embedded into a product of  $n$  one-dimensional compact metric spaces. First, we tried to determine a class of  $n$ -dimensional topological and generalized manifolds which can be embedded into a product of  $n$  one-dimensional compact metric spaces by using geometric structures and the rank of 1-dimensional cohomology groups. Next, we applied this method to arbitrary  $n$ -dimensional compact metric spaces to determine embeddability and succeeded to give a criterion by using the triviality of  $n$ -dimensional Čech cohomology groups and the rank of 1-dimensional Čech cohomology groups.

交付決定額

（金額単位：円）

|        | 直接経費      | 間接経費    | 合計        |
|--------|-----------|---------|-----------|
| 2009年度 | 1,100,000 | 330,000 | 1,430,000 |
| 2010年度 | 1,000,000 | 300,000 | 1,300,000 |
| 2011年度 | 1,100,000 | 330,000 | 1,430,000 |
| 年度     |           |         |           |
| 年度     |           |         |           |
| 総計     | 3,200,000 | 960,000 | 4,160,000 |

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：位相幾何、Coarse 幾何、コホモロジー次元論

## 1. 研究開始当初の背景

Asymptotic 幾何学の概念は1つの large

-scale 幾何学として、主に M. Gromov の研究活動によって、その重要性が広く認識され、

当時、現在も、離散群の研究及び基本群に随伴する多様体の不変量の研究の基本的な手法の一つになっている。Coarse 幾何学は、(有界でない)距離空間、例えば完備な開リーマン多様体や一般化された CAT(0)空間のような空間を対象とする large-scale 幾何学として定式化され、small details (bounded details)は無視するが、大域的な性質を研究するものとして大きな役割を果たしている。実際そこでの性質や不変量は無限遠での極限を調べることによって得られている。一方、従来トポロジーの研究では局所的性質を調べることから成り立っているものも多くあった。たとえば(コホモロジー)次元論や ANR 理論などがそうであった。ところが上述の無限遠での極限も点と見なすことによって従来の small scale の見方が展開できる可能性がわかってきた。たとえば離散群の不変量として Gromov によって導入された asymptotic 次元はその例である。さらに、G. You (Ann. of Math. 147(2) (1998), 325 -- 355) の著しい結果を動機付けとして、例えば、J. Roe, A. N. Dranishnikov, S. Buyalo らが coarse 幾何学を、群の asymptotic 次元の研究を精力的に展開するに至っている。

## 2. 研究の目的

幾何学的群論を「Coarse 幾何学」と「Asymptotic 次元」をキーワードにして研究する。実際に次元の概念による評価が可能な coarse 幾何学、具体的には評価関数の線形性と bi-Lipshitz 関数を用いた coarse 幾何学の構築と対応する asymptotic 次元の研究を行うことを一つの柱とする。そのために asymptotic 次元へ、(位相)次元の計算で強力な代数的トポロジーからの手法であるコホモロジー次元論の導入を図り、概念だけでなく実際の計算へ展開していく。

ここでは coarse 幾何学を導入した一般の proper 距離空間のコホモロジー asymptotic 次元論の展開にすることから(無限)離散群の asymptotic 次元を効率的に計算することで、離散群の(代数的)構造の解明を進めることを目指している。

## 3. 研究の方法

今回提案したプロジェクトは、幾何学的群論を coarse 幾何学と asymptotic 次元の立場から研究するためのものである。

代表者小山は coarse 幾何学及びコホモロジー次元論の研究を基礎に置いているが各々の連携研究者は以下の研究に基礎を置いている。

保坂哲也：Coxeter 群の幾何的実現の幾何学とその理想境界の位相幾何学の研究；

知念直紹：Coarse 幾何学と距離に依存するコンパクト化との関係を位相空間論的研究；

江田勝哉：境界として現れる野生的空間の基本群、無限生成群の研究及び関連した word problem；

矢ヶ崎達彦：無限次元多様体論の手法を基にした coarse 幾何学の位相空間論的性質を研究；

我々はコンパクト距離空間や可分距離空間の位相幾何学を追求する幾何学的トポロジーの研究に基盤があることに特徴があり、研究目的の挑戦に適合した個々の課題に応えることのできる独立した研究者である。その強みを生かして、現在 metric topology の分野とも呼ばれている coarse 幾何学とその境界の位相幾何学の研究を、(コホモロジー)次元論を手法として、幾何学的群論の研究にあたる。幾何学的群論は古くからあるが、新しい展開を見せている分野である。

その中で「次元」をキーワードとするに我々のアプローチは Gromov 以降であり、必ずしも拠点的な集団があるものではなく、coarse 幾何学や asymptotic 次元に関わる研究活動をしている者は各地に点在しているのが実状である。そこで私は研究の一層の発展と活性化を行うために、それぞれの専門家としての活動を生かし、セミナーを定期的に開催する、積極的に連携犬種派を尋ねるなどの交流から共同研究を進めること主体に新しい展開を追求した。また 2009 年には R-trees に関連して先駆的な研究をしている Manuelo Alonso Moran, (マドリッド総合大学・スペイン)を招き、集中講義とセミナーを行った。

## 4. 研究成果

Coarse 幾何学における次元論を主に asymptotic 次元論の立場で研究を進めたが、埋蔵問題の重要性に行き着き、「どのような  $n$  次元コンパクト距離空間が  $n$  個の 1 次元コンパクト距離空間の積空間へ埋蔵することが可能か」を様々な角度から研究を進め、埋蔵可能な  $n$  次元多様体及び一般多様体の幾何的構造をその 1 次元コホモロジー群の整数加群としての階数から決定することを試みた。また、一般の  $n$  次元コンパクト距離空間  $X$  についても、その判定条件を  $n$  次元チェック コホモロジー群の自明性と 1 次元チェック コホモロジー群の階数の関連から研究した。その結果、主定理の 1 つとして

「 $n$  個の 1 次元コンパクト距離空間の積空間へ埋蔵することができる  $n$  次元多様体は単体分割可能であり、次を満たす：

(1) 1 次元コホモロジー群の整数加群としての階数は  $n$  以上；

(2) その階数が  $n+k$ ,  $k < n$ , ならばその多様体は  $n-k$  次元トーラスとの積へ分解できる；

(3)その階数が丁度  $n$  ならば  $n$  次元トーラスである。」  
がある。これらをまとめたものが論文リスト2である。

またこの成果を 1 次元コンパクト距離空間の  $n$  次対称積の場合への埋蔵問題へ応用するために、グラフの  $n$  次対称積のホモトピー型を決定するなど、1 次元コンパクト距離空間の対称積のコホモロジー群の構造を決定することに成功した。これらをまとめたものが論文リスト1である。

連続体理論でも、 $n$  次対称積の概念はやや異なる形で研究されているが、そのホモトピー型の決定にも問題を拡張した。その第一歩として円周の対称積のホモトピー型を決定した。これらをまとめたものが論文リスト3である。

さらに、コホモロジー次元論を Higson コンパクト化の境界の(コホモロジー)次元論へ応用するために距離付けできない一般のコンパクト Hausdorff 空間へ拡張することが必要になり、その研究の端緒を見つけることができ、国際学会(リスト3)で発表した。

また最終年度に「第1回早稲田幾何学的トポロジーセミナー(2012年2月28日~3月2日)を開催した。講演者は連携研究者から知念直嗣(広島工業大学)、保坂哲也(静岡大学)を、そのほかに嶺幸太郎(筑波大学)、山下温(東北大学)、山内貴光(島根大学)、杉浦忠嗣(早稲田大学)であった。若手研究者が主体で、活発な議論が繰り広げられ、今後への足がかりとなるものであった。

日程表

|                  | 2/28(火) | 2/29(水) | 3/1(木) | 3/2(金) |
|------------------|---------|---------|--------|--------|
| 10:00 -<br>10:30 |         | 山下      | 山下     | 知念     |
| 11:00 -<br>12:00 |         | 嶺       | 嶺      | 山内     |
| 13:30 -<br>14:30 | 知念      | 保坂      | 杉浦     |        |
| 15:00 -<br>16:00 | 知念      | 保坂      | 杉浦     |        |
| 16:30 -<br>17:00 | 自由討論    | 自由討論    | 自由討論   |        |

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計4件)

1. On embeddings into products of curves - An algebraic approach, A. Koyama, J.Krasinkiewicz and S. Spiez, Houston J. Math (in press) (査読有) .
2. Generalized manifolds in products of curves, A. Koyama, J.Krasinkiewicz and S. Spiez, Trans. Amer. Math. Soc. 363 (2011), no. 3, 1509--1532 (査読有) .
3. On the symmetric hyperspace of the circle, N.Chinen and A.Koyama Topology and its Appl. 157(2010), no. 17, 2613-2621 (査読有) .
4. Continuous linear extension of functions, A.Koyama, I.Stasyuk, E.D.Tymchatyn and A.Zagorodnyuk, Proc. Amer. Math. Soc, 138(2010), no. 11, 4149-4155 (査読有) .

[学会発表] (計8件)

1. 小山 晃, Surfaces in products of two curves, 2011 年度 General Topology Symposium, 埼玉大学, 2011年12月20日
2. Koyama Akira, A role of Whyburn factorization theorem for embeddings of  $n$ -dimensional continua into products of  $n$  curves, Geometric Topology Conference in honor of Evgeny Shchepin on the occasion of his 60th birthday, UNAM-Oaxaca, Mexico, October 15 --16, 2011 (招待講演) .
3. Koyama Akira, Note on acyclic resolutions and cohomological dimension, Israeli-Polish Mathematical Meeting, University of Lodz, Poland, September 12 --15, 2011 (招待講演) .
4. Koyama Akira, Homotopy Type of Symmetric Products of Graphs - Topics from Embedding Theorems, Dubrovnik VII -- Geometric Topology, Inter University, Dubrovnik, Croatia, June 25--July 1, 2011 (招待講演) .
5. 小山 晃, On symmetric products of graphs and embedding theorems, 2010 年度 General Topology Symposium, 筑波大学, 2010年12月18日.
6. Koyama Akira, Embeddings of  $n$ -dimensional compacta into products of curves, International Conference Japan-Mexico on Topology and its Applications, University of Colima, Mexico, September 27 -- October 1, 2010 (基調講演) .
7. 小山 晃,  $n$  次元一般多様体の埋蔵について, 2009 年度 General Topology Symposium, 大分大学, 2009年12月16日.
8. 小山 晃, Coarse 幾何学の shape 理論的接近, 研究集会「一般のおよび幾何学的トポロジーの諸問題」, 京都大学数理解析研究所, 2009年10月15日.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

小山 晃 (KOYAMA AKIRA)  
早稲田大学・理工学術院・教授  
研究者番号：40116158

(2) 研究分担者

( )

研究者番号：

(3) 連携研究者

保坂 哲也 (HOSAKA TETSUYA)  
静岡大学・理学部・准教授  
研究者番号：50344908  
知念 直嗣 (CHINEN NAOTSUGU)  
広島工業大学・工学部・准教授  
研究者番号：20370067  
江田 勝哉 (EDA KATSUYA)  
早稲田大学・理工学術院・教授  
研究者番号：90015826  
矢ヶ崎 達彦 (YAGASAKI TATSUHIKO)  
京都工芸繊維大学・工芸科学研究科・  
教授  
研究者番号：40191077