

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 5月31日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2012

課題番号：21540077

研究課題名（和文）

結び目と3次元多様体の同変不変量

研究課題名（英文）

Equivariant invariants of knots and 3-manifolds

研究代表者

大槻 知忠 (OHTSUKI TOMOTADA)

京都大学・数理解析研究所・教授

研究者番号：50223871

研究成果の概要（和文）：

結び目と3次元多様体の不変量について研究した。
LMO 不変量から一般の単純リー環に対する摂動的な不変量が導出されることを筆者は栗屋隆仁氏と Thang Le 氏との共同研究で証明し、論文を執筆した。筆者は、交点数の少ないいくつかの結び目について、Kashaev 不変量の漸近展開を具体的に計算し、これらの結び目について体積予想が成り立つことを確認した。

研究成果の概要（英文）：

The author has studied invariants of knots and 3-manifolds.
The author showed that the perturbative invariant is derived from the LMO invariant in the case of any simple Lie algebra in a joint work with Takahito Kuriya and Thang T. Q. Le. The author calculated the asymptotic expansion of the Kashaev invariant of some simple knots, and verified that the volume conjecture holds for these knots.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010年度	900,000	270,000	1,170,000
2011年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	2,800,000	840,000	3,640,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：結び目・3次元多様体・不変量

1. 研究開始当初の背景

3次元の位相幾何学において、1980年代以来、Chern-Simons 理論にもとづいて膨大な数の不変量（量子不変量）が発見され、不変量の研究、すなわち、結び目の集合と3次元多様体の集合の研究という新しい研究領域がもたらされた。1990年代に、結び目の量子

不変量は Kontsevich 不変量に統一され、筆者等によって3次元多様体の摂動的な不変量や LMO 不変量が導入されたが、結び目や3次元多様体の分類問題の観点から、これらの不変量の研究が重要であるとおもわれる。一方、幾何構造による3次元多様体の分類理論が近年完成し、その観点から、量子不変量と双曲

幾何の関係を記述する体積予想の研究が重要であるとおもわれる。

2. 研究の目的

3次元多様体の量子不変量、摂動的な不変量、LMO 不変量や結び目の量子不変量、Kontsevich 不変量について、双曲幾何等の関連する話題にも留意して、研究をすすめ、この分野の研究を進展させることが、本研究の目的であった。Kontsevich 不変量と LMO 不変量はそれぞれ結び目と整ホモロジー球面を分類するであろうと期待されている非常に強力な不変量であり、とくに、結び目と3次元多様体の分類問題と関連して、Kontsevich 不変量と LMO 不変量 やこれに関連する不変量の研究が重要であると筆者は考えた。また、双曲幾何との関連の観点から体積予想の研究が重要であると筆者は考えた。

3. 研究の方法

LMO 不変量から weight system により一般の単純 Lie 環に対する摂動的な不変量が導出されること (LMO 不変量の普遍性) について、他の研究者によってかなり以前にアナウンスはされていたもののまだその証明は発表されていなかった。筆者は栗屋隆仁氏と Thang Le 氏との共同研究で一般の Lie 環に対するこの普遍性に関する論文を執筆することをめざした。

また、筆者は Kashaev 不変量の漸近展開を比較的簡単な双曲結び目について具体的に計算することをめざした。その漸近展開の最初の項は双曲体積で与えられることが予想されている (体積予想) が、それらの場合についてその予想を証明することをめざした。

また、この分野の研究を今後さらに発展させるために、筆者は、毎年、数理解析研究所において研究集会 Intelligence of Low-dimensional Topology を開催することを計画した。また、筆者は本研究の連携研究者の葉廣和夫氏と共同で、数理解析研究所において低次元トポロジーセミナーを継続的に開催することをめざした。

4. 研究成果

LMO 不変量から weight system により摂動的な不変量が導出されること (LMO 不変量の普遍性) について、筆者は以前の研究で Lie 環が \mathfrak{sl}_2 のときにこの普遍性を証明しているが、一般の単純 Lie 環に対するこの普遍性について、筆者は栗屋隆仁氏と Thang Le 氏との共同研究で、論文を執筆した。LMO 不変量に weight system を適用したものは Lie 環の双

対空間上の Gauss 積分の摂動展開で表示でき、摂動的な不変量は Cartan 部分環の双対空間上の Gauss 積分の摂動展開で表示できるが、それらの摂動展開を Laplacian で表示し Harish-Chandra の制限公式を使うという方針で、問題の普遍性を証明した。

結び目の Kashaev 不変量の漸近展開について、筆者は、交点数の少ないいくつかの結び目について、この展開を具体的に計算し、体積予想が成り立つことを確認した。従来の研究で懸案になっていた「和を積分で近似する部分」は Poisson 和公式を用いることで計算を実行した。

これらの研究成果に関連して、筆者は、2012年2月に京都大学の国際研究集会で招待講演をした。

また、これらの研究成果と関連して、筆者は3次元多様体の不変量について著書(共著、「幾何学百科」第2巻 第4章、朝倉書店)を執筆した(現時点で未刊行)。

筆者は、2010年以降に毎年、京都大学数理解析研究所において、研究集会 Intelligence of Low-dimensional Topology を開催した。この研究集会において、筆者は problem session を企画し、その成果として未解決問題集を編集して、数理解析研究所講究録の一部として出版した。また、筆者は、本研究の連携研究者の葉廣和夫氏と共同で、京都大学数理解析研究所において、低次元トポロジーセミナーを開催した。2009年度以降の講演者は、Ivan Izmistiev, Oliver Dasbach, Mark Powell, David Farris, Sergei Duzhin, Jean-Baptiste Meilhan, Stefan Friedl, Gregor Masbaum の各氏であった。これらの研究集会やセミナーは申請者や連携研究者との共同研究をすすめるにあたって、また、大学院生等の若手研究者との研究交流の面からも、大変有益であった。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計4件)

① T. Kuriya, T. T. Q. Le, T. Ohtsuki, The perturbative invariants of rational homology 3-spheres can be recovered from the LMO invariant, J Topology, **5** (2012) 458--484. 査読あり
doi: 10.1112/jtopol/jts010

② T. Ohtsuki, Perturbative invariants

of 3-manifolds with the first Betti number 1, *Geometry and Topology*, **14** (2010) 1993--2045. 査読あり
DOI: 10.2140/gt.2010.14.1993

③ T. Ohtsuki, Invariants of knots derived from equivariant linking matrices of their surgery presentations, *Internat. J. Math.*, **20** (2009) 883--913. 査読あり
DOI: 10.1142/S0129167X09005583

④ Kazuo Habiro and Gwénaél Massuyeau, Symplectic Jacobi diagrams and the Lie algebra of homology cylinders, *J. Topology*, **2** (2009) 527--569. 査読あり
doi: 10.1112/jtopol/jtp020

[学会発表] (計 35 件)

① Kazuo Habiro
Kirby calculus for null-homologous framed links in 3-manifolds, *Low dimensional topology and number theory V*, 2013/3/13
Soft Research Park Center, Fukuoka

② Kazuo Habiro
Quantum fundamental groups of 3-manifolds I, II, III, *The 9th East Asian School of Knots and Related Topics*, 2013/1/14, 15, 16
Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo

③ Kazuo Habiro
Quantum fundamental groups I, II, III, *Winter Braids III*, 2012/12/17, 19, 20
Université de Grenoble (フランス)

④ Kazuo Habiro
Quantum fundamental groups of 3-manifolds, *Séminaire de Topologie*, 2012/12/11
Institut Mathématiques de Jussieu, Université Paris 6 (フランス)

⑤ Kazuo Habiro
Kirby calculus for null-homologous framed links in 3-manifolds, *Groupe de travail TQFT et catégorification*, 2012/12/10
Institut Mathématiques de Jussieu, Université Paris 7 (フランス)

⑥ Kazuo Habiro
Kirby calculus for null-homologous framed links in 3-manifolds, *Séminaire de Topologie*, 2012/11/23
Institut Fourier, Université de Grenoble (フランス)

⑦ Kazuo Habiro

Quantum fundamental groups of 3-manifolds, *Low-Dimensional Topology and Number Theory*, 2012/8/29
Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach (ドイツ)

⑧ Kazuo Habiro
On the structure of the mapping class category, *Mapping class groups and quantum topology*, 2012/6/29
IRMA, Strasbourg (フランス)

⑨ Kazuo Habiro
Quantum representation varieties as pseudo double functors, *Low Dimensional Topology and Number Theory IV*, 2012/3/13
Kyushu University, Fukuoka

⑩ T. Ohtsuki,
On the asymptotic expansion of the Kashaev invariant of knots, *The 3rd GCOE Workshop for Young Mathematicians*, 2012/2/20
Kyoto University

⑪ Kazuo Habiro
Quantum fundamental groups of 3-manifolds, *East Asian Conference on Algebraic Topology*, 2011/12/5
Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo

⑫ 葉廣和夫
Quantum fundamental groups and quantum representation varieties of 3-manifolds
トポロジー金曜セミナー, 2011/11/16
九州大学数理学研究院

⑬ Kazuo Habiro
Quantum fundamental groups of 3-manifolds, *Geometry & Topology Down Under*, 2011/7/21
University of Melbourne (オーストラリア)

⑭ Kazuo Habiro
Quantum fundamental groups and quantum representation varieties for 3-manifolds, *Geometric and analytic approaches to representations of a group and representation spaces*, 2011/6/20
RIMS, Kyoto University

⑮ Kazuo Habiro
Quantum fundamental groups and quantum representation varieties for 3-manifolds, *Swiss Knots 2011*, 2011/5/25
GWATT-Zentrum, Lake Thun, Switzerland

⑯ Kazuo Habiro

Quantum fundamental groups and quantum representation varieties for 3-manifolds, Low dimensional topology and number theory III, 2011/3/16
Nishijin Plaza, Fukuoka

⑰ Kazuo Habiro

Quantum fundamental groups and quantum representation varieties for 3-manifolds, 2011/2/3
Institut für Mathematik, Universität Zürich (スイス)

⑱ 葉廣和夫

Quantum fundamental groups and quantum representation varieties for 3-manifolds, 信州トポロジーセミナー, 2010/12/15
信州大学理学部数理・自然情報科学科

⑲ 葉廣和夫

Quantum fundamental groups and quantum representation varieties for 3-manifolds, 幾何学コロキウム, 2010/12/9
北海道大学大学院理学研究院数学部門

⑳ 葉廣和夫

Quantum fundamental groups and quantum representation varieties for 3-manifolds, トポロジー火曜セミナー, 2010/10/26
東京大学大学院数理科学研究科

21. Kazuo Habiro

Quantum fundamental groups and quantum representation varieties for 3-manifolds, 2010/9/16
Section de Mathématiques, Université de Genève (スイス)

22. Kazuo Habiro

On certain limits of the reduced colored Jones polynomials of knots, Knots in Poland III, 2010/8/2
Stefan Banach International Mathematical Center, Bedlewo, Poland

23. Kazuo Habiro

Bottom tangles and quantum link invariants, Diagram algebras and related topics, 2010/7/7
Culture Resort Festone, Ginowan, Okinawa

24. Kazuo Habiro

Clasper surgeries and Brunnian links, International Conference on Algebraic and Geometric Topology, 2010/7/2
Capital Normal University, Beijing (中国)

25. 葉廣和夫

底タングルの圏と量子不変量について
大談話会, 2010/5/26
京都大学数理解析研究所

26. Kazuo Habiro

Refined Kirby calculus for closed 3-manifolds, Séminaire Quantique, 2010/5/3
IRMA, Strasbourg (フランス)

27. Kazuo Habiro

Refined Kirby calculus for closed 3-manifolds, Séminaire de Topologie, 2010/4/27
Institut Mathématique de Jussieu, Université Paris 7 (フランス)

28. Kazuo Habiro

On certain limits of the reduced colored Jones polynomials of knots, Topologie Algébrique et quantique, 2010/4/22
CIRM, Luminy (フランス)

29. Kazuo Habiro

On certain limits of the reduced colored Jones polynomials, 2010/4/13
Institut für Mathematik, Universität Zürich (スイス)

30. Kazuo Habiro

Refined Kirby calculus for closed 3-manifolds, 2010/4/12
Institut für Mathematik, Universität Zürich (スイス)

31. 葉廣和夫

結び目の reduced colored Jones polynomial について
新 KOOK セミナー, 2010/4/10
大阪市立大学文化交流センター

32. Kazuo Habiro

On the reduced colored Jones polynomial of links Workshop "Low-dimensional topology and number theory II", 2010/3/17
Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo

33. 葉廣和夫

底タングルと量子不変量について
大岡山談話会, 2009/12/16 東京工業大学

34. 葉廣和夫

絡み目とホモロジー 3次元球面の量子不変量, 講演会, 2009/6/13

東京大学大学院数理科学研究科

35. 葉廣和夫

コボルディズム圏の nerve と cyclic nerve
について, 研究集会「トポロジーと写像の特
異点」2009/6/4
信州大学理学部

〔図書〕(計1件)

① Kazuo Habiro and Gwénaél Massuyeau,
From mapping class groups to monoids of
homology cobordisms: a survey,
in A. Papadopoulos (ed.), Handbook of
Teichmüller Theory III,
European Mathematical Society, 2012,
465-530

6. 研究組織

(1) 研究代表者

大槻 知忠 (OHTSUKI TOMOTADA)
京都大学・数理解析研究所・教授
研究者番号: 50223871

(3) 連携研究者

葉廣 和夫 (HABIRO KAZUO)
京都大学・数理解析研究所・准教授
研究者番号: 60346064