

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 6 月 4 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2011

課題番号：21540078

研究課題名（和文） 低次元トポロジーの代数的研究

研究課題名（英文） Algebraic study on low-dimensional topology

研究代表者

葉廣 和夫（HABIRO KAZUO）

京都大学・数理解析研究所・准教授

研究者番号：80346064

研究成果の概要（和文）：

3次元トポロジーのいくつかのトピックスについて研究を行った。G. Massuyeau 氏と共同で、曲面のホモロジーシリンダーについての概説論文を完成させた。また、3次元多様体の中の枠付き絡み目に対する Kirby カルキュラス、結び目の簡約化された色つき Jones 多項式の「頭」と「尾」と呼ばれる冪級数展開、3次元多様体の量子基本群および量子表現多様体などについての研究を行った。

研究成果の概要（英文）：

We studied on several topics in 3-dimensional topology. Jointly with G. Massuyeau, we completed a survey article on homology cylinders over surfaces. We also studied Kirby calculus for framed links in 3-manifolds, power series expansions of the reduced colored Jones polynomials of knots called the “heads” and “tails”, and the quantum fundamental groups and the quantum representation varieties for 3-manifolds.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
2010年度	700,000	210,000	910,000
2011年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総計	2,200,000	660,000	2,860,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：位相幾何学、3次元多様体、絡み目、量子不変量

- | | |
|--|--|
| 1. 研究開始当初の背景
絡み目の Jones 多項式の発見以来、絡み目と | 3次元多様体の量子不変量と呼ばれるさまざまな不変量が構成され、活発に研究されてい |
|--|--|

る。これらの不変量を研究する分野は量子トポロジーと呼ばれている。

量子不変量を理解するのに最も適した枠組みは、圏論的なものである。たとえば、タングルの圏はモノイダル圏の構造をもち、絡み目を基本的な部分に分割して研究するひとつの手段を与えている。また、さまざまな量子不変量のなかで最も重要なものの一つである、タングルの Reshetikhin-Turaev 不変量は、タングルの圏から量子群(リボンHopf 代数)上の左加群のなす圏へのモノイダル関手として定義される。同様に、いわゆる位相的場の理論 (TQFT) はコボルディズムの圏からベクトル空間の圏への関手とみなすことができる。Crane と Yetter, Kerler は、円周 S^1 を境界とする曲面の間のコボルディズムたちのなす braided モノイダル圏 C を導入し、 C の中に braided Hopf 代数の構造があることを発見した。筆者は、 C の部分圏とみなせる圏 B で、「ハンドルボディ内の底タングルのなす圏」と呼ぶものを導入した。 B は上記の Hopf 代数構造を含み、しかも絡み目理論への応用に関して、 C よりも有用なものである。筆者は3次元トポロジーにおける、これらの圏論的構造に興味を持ち研究を続けてきた。

2. 研究の目的

本研究の目的は、低次元トポロジーを代数的・圏論的な側面から研究することである。本研究では、主に量子トポロジーの観点から、また、関連する他のいくつかの観点からも、低次元トポロジーについて考察することを目的とする。

(1) 量子不変量の研究

$U_q(\mathfrak{sl}_2)$ などの量子群とその表現を用いて定義される、絡み目と3次元多様体の量子不変量(色つき Jones 多項式、Witten-Reshetikhin-Turaev 不変量など)について、圏論的な構造(上記の圏 B , C など)を必要に応じて利用しながら、代数的な手法により研究する。特に、絡み目・3次元多様体の幾何的・位相的な性質と量子不変量の代数的な性質の関連を調べる。

(2) Kontsevich-Le-Murakami-Ohtsuki 不変量についての研究

Cheptea, Massuyeau と筆者は、上記の圏 B を部分圏として含む、曲面とラグランジアンコボルディズムの圏で定義される、

Kontsevich-LMO型の関手的な不変量 (LMO関手) を構成した。LMO関手は、整係数ホモロジー球面や、その中の絡み目、あるいはタングルの Kontsevich-LMO 不変量を圏論的な枠組みで研究するための有用で洗練された枠組みを与えている。この関手を用いて、Kontsevich-LMO不変量について研究する。特に、ホモロジーシリンダーや曲面の写像類群の Torelli部分群への応用について考察する。

3. 研究の方法

上記の圏 B, C などの代数的構造 (braidedモノイダル構造や、その中に入る braided Hopf 代数構造、また、リボンHopf代数上の左加群の圏への関手など) を利用して、量子不変量や Kontsevich-LMO不変量などについて考察する。また、圏論的な枠組みの利用は、従来、低次元トポロジーにおいてよりも、代数的トポロジーにおいて、より発展させられていたが、このような代数的トポロジーにおけるアイデアを積極的に低次元トポロジーに持ち込むことを試みる。

4. 研究成果

(1) 2009年度は、シンプレクティック Jacobi 図と曲面のホモロジーシリンダーに付随する Lie 代数構造との関連についての論文 (G. Massuyeau と共著) を出版した。また、G. Massuyeau と共同で、曲面のホモロジーシリンダーについての概説論文を完成させた。論文を準備中の研究としては、以下の事項について研究を行った。

①コボルディズムの圏の nerve (分類空間) と cyclic nerve のホモトピー型についての研究を行った。これらは位相的場の理論の観点からも、重要な研究対象と考えられる。

②Fenn と Rourke による、有向閉3次元多様体の中の枠付き絡み目に対する Kirby カルキュラスについての結果を改良する結果について、研究した。当初はこれを証明できたと考えたのであるが、証明にギャップがあることが、C. Blanchet と G. Masbaum によって指摘されたので、再証明に取り組んだ。(これについては、実際に反例が存在することが最近わかった。)

③Dasbach と Lin によって存在が予想された、結び目の色つき Jones 多項式の「頭」および「尾」と呼ばれる形式的べき級数について研究した。特に、正結び目(交差がすべて正で

あるような図式をもつ結び目) について研究を行った。コンピュータを用いた実験により、正結び目の簡約された色つき Jones 多項式の「頭」のすべての係数は非負であろうという予想を得ることができた。この予想の証明について取り組んだ。

(2)2010 年度は結果を論文として発表することはできなかったが、以下の研究をおこない、研究集会などの場で発表を行った。

①前年度に引き続き、結び目の簡約化された色つき Jones 多項式の係数と次数についての研究を行った。交代結び目と正結び目の場合に、Dasbach と Lin による色つき Jones 多項式の展開と同様の展開を交点数の小さな結び目の簡約色つき Jones 多項式に対して計算し、予想を立てたが、すべての正・交代結び目に対する証明はまだ得られていない。特に、計算できた範囲では、予想される展開の性質が、結び目が正であるか否かを決定するなど、顕著な性質を示している。また、これらの展開は、数論的あるいは組み合わせ論的に興味深い q 級数になることが多く、これらの性質と結び目の位相的性質との間の関連を詳しく調べることは興味深い課題である。

②ハンドルボディ内の底タングルの圏 B についての研究に関連して、3 次元多様体の基本群の精密化である量子基本群という不変量についての研究を行った。量子基本群は 3 次元多様体の中の底タングルのイソトピー類からなる集合の上の代数的な構造であり、各 3 次元多様体に対して、圏 B から集合の圏への関手として定義される。この理論は 3 次元多様体の基本群に関する種々の概念を「量子化」することを目指している。たとえば、3 次元多様体の量子基本群の分類空間、余リボン Hopf 代数に付随する量子表現多様体が定義できる。また、量子基本群に対する van Kampen 型の定理により、量子表現多様体の張り合わせ公式が得られ、それにより、量子表現多様体の位相的場の理論的な定式化が得られる。これらは、古典的な基本群に対する対応物の自然な精密化になっている。

(3)2011 年度は残念ながら、研究成果を論文の形で発表することはできなかったが、以下の研究を行い、その一部については研究集会などの場で発表を行った。これらの結果についての論文は準備中である。

①前年度に引き続き、量子基本群と呼ばれる 3 次元多様体の不変量についての研究を行った。量子基本群に対する van Kampen 定理を利用して、量子基本群を、3 次元多様体と埋め込みの圏 E から、ハンドルボディを対象とする E の充満部分圏 H 上の前層の圏へのモノイダル関手を定義することを証明した。また、圏 E の対象を、部分圏 H における射の対に対する coequalizer として表すことが、ほぼできることを証明した。この応用として、3 次元多様体 M の量子表現空間を M の Heegaard 分解から求める代数的な公式を得ることができる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 1 件)

1. Kazuo Habiro and Gwénaél Massuyeau, Symplectic Jacobi diagrams and the Lie algebra of homology cylinders, *J. Topology* 2 (2009) 527–569. (査読あり) doi: 10.1112/jtopol/jtp020

[学会発表] (計 26 件)

- ① Kazuo Habiro, “Quantum representation varieties as pseudo double functors”, *Low Dimensional Topology and Number Theory IV*, 2012/3/13, Kyushu University, Fukuoka
- ② Kazuo Habiro, “Quantum fundamental groups of 3-manifolds”, *East Asian Conference on Algebraic Topology Graduate School of Mathematical Sciences*, 2011/12/5, University of Tokyo
- ③ 葉廣和夫, “Quantum fundamental groups and quantum representation varieties of 3-manifolds”, *トポロジー金曜セミナー*, 2011/11/16, 九州大学数理学研究院
- ④ Kazuo Habiro, “Quantum fundamental groups of 3-manifolds”, *Geometry & Topology Down Under*, 2011/7/21, University of Melbourne (オーストラリア)

- ⑤ Kazuo Habiro, “Quantum fundamental groups and quantum representation varieties for 3-manifolds”, Geometric and analytic approaches to representations of a group and representation spaces, 2011/6/20, RIMS, Kyoto University
- ⑥ Kazuo Habiro, “Quantum fundamental groups and quantum representation varieties for 3-manifolds”, Swiss Knots 2011, 2011/5/25, GWATT-Zentrum, Lake Thun, Switzerland
- ⑦ Kazuo Habiro, “Quantum fundamental groups and quantum representation varieties for 3-manifolds”, Low dimensional topology and number theory III, 2011/3/16, Nishijin Plaza, Fukuoka
- ⑧ Kazuo Habiro, “Quantum fundamental groups and quantum representation varieties for 3-manifolds”, 2011/2/3, Institut für Mathematik, Universität Zürich
- ⑨ 葉廣和夫, “Quantum fundamental groups and quantum representation varieties for 3-manifolds”, 信州トポロジーセミナー, 2010/12/15, 信州大学理学部数理・自然情報科学科
- ⑩ 葉廣和夫, “Quantum fundamental groups and quantum representation varieties for 3-manifolds”, 幾何学コロキウム, 2010/12/9, 北海道大学大学院理学研究院数学部門
- ⑪ 葉廣和夫, “Quantum fundamental groups and quantum representation varieties for 3-manifolds”, トポロジー火曜セミナー, 2010/10/26, 東京大学大学院数理科学研究科
- ⑫ Kazuo Habiro, “Quantum fundamental groups and quantum representation varieties for 3-manifolds”, 2010/9/16, Section de Mathématiques, Université de Genève (スイス)
- ⑬ Kazuo Habiro, “On certain limits of the reduced colored Jones polynomials of knots”, Knots in Poland III, 2010/8/2, Stefan Banach International Mathematical Center, Bedlewo, Poland
- ⑭ Kazuo Habiro, “Bottom tangles and quantum link invariants”, Diagram algebras and related topics, 2010/7/7, Culture Resort Festone, Ginowan, Okinawa
- ⑮ Kazuo Habiro, “Clasper surgeries and Brunnian links”, International Conference on Algebraic and Geometric Topology, 2010/7/2, Capital Normal University, Beijing (中国)
- ⑯ 葉廣和夫, 「底タングルの圏と量子不変量について」, 大談話会, 2010/5/26, 京都大学数理解析研究所
- ⑰ Kazuo Habiro, “Refined Kirby calculus for closed 3-manifolds”, Séminaire Quantique, 2010/5/3, IRMA, Strasbourg (フランス)
- ⑱ Kazuo Habiro, “Refined Kirby calculus for closed 3-manifolds”, Séminaire de Topologie, 2010/4/27, Institut Mathématique de Jussieu, Université Paris 7 (フランス)
- ⑲ Kazuo Habiro, “On certain limits of the reduced colored Jones polynomials”, 2010/4/13, Institut für Mathematik, Universität Zürich (スイス)
- ⑳ Kazuo Habiro, “Refined Kirby calculus for closed 3-manifolds”, 2010/4/12, Institut für Mathematik, Universität Zürich (スイス)
- 21 葉廣和夫, 「結び目の reduced colored Jones polynomial について」, 新 KOOK セミナー, 2010/4/10, 大阪市立大学文化交流センター
- 22 Kazuo Habiro, “On the reduced colored

Jones polynomial of links” , Workshop
“Low-dimensional topology and number
theory II”, 2010/3/17, Graduate School
of Mathematical Sciences, University of
Tokyo

- 23 Kazuo Habiro, “On certain limits of the
reduced colored Jones polynomials of
knots” , Topologie algébrique et
quantique, 2010/4/22, CIRM, Luminy (フ
ランス)
- 24 葉廣和夫, 「底タングルと量子不変量に
ついて」, 大岡山談話会, 2009/12/16, 東
京工業大学
- 25 葉廣和夫, 「絡み目とホモロジー 3 次元
球面の量子不変量」, 講演会, 2009/6/13,
東京大学大学院数理科学研究科
- 26 葉廣和夫, 「コボルディズム圏の nerve
と cyclic nerve について」, 研究集会「ト
ポロジーと写像の特異点」, 2009/6/4, 信
州大学理学部

[図書] (計 1 件)

1. Kazuo Habiro and Gwénaél Massuyeau,
From mapping class groups to monoids of
homology cobordisms: a survey, to
appear in: A. Papadopoulos (Ed.)
Handbook of Teichmüller Theory,
European Mathematical Society.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

葉廣 和夫 (HABIRO KAZUO)
京都大学・数理解析研究所・准教授
研究者番号 : 80346064