

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 29 日現在

機関番号：12608

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2009～2013

課題番号：21540079

研究課題名(和文)写像類群の構造と4次元多様体の位相幾何学

研究課題名(英文)Structure of mapping class groups and topology of 4-manifolds

研究代表者

遠藤 久顕(Endo, Hisaaki)

東京工業大学・理工学研究科・教授

研究者番号：20323777

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円、(間接経費) 960,000円

研究成果の概要(和文)：多様体の位相幾何学においては、5次元以上のいわゆる高次元の場合よりも、3次元・4次元といった低次元の場合に複雑な現象の現れることが多い。本研究課題は4次元多様体の位相幾何学に関するものである。特に、Lefschetzファイバー空間と呼ばれる、無数の曲面(2次元多様体)が集まって構成されているような4次元多様体を扱っている。それを記述する際に、曲面の写像類群と呼ばれる代数的な対象が重要となる。研究の結果、写像類群のデータを変更すると、Lefschetzファイバー空間がどのように変化するかが非常に詳しく解明された。

研究成果の概要(英文)：It is often more difficult to examine low dimensional manifolds (3-manifolds and 4-manifolds) than to examine higher dimensional manifolds in topology. We studied the topology of 4-manifolds in this research project. In particular, we investigated Lefschetz fibrations, which are 4-manifolds consisting of infinitely many (possibly singular) surfaces (2-manifolds). We make use of mapping class groups of surfaces, which are algebraic objects related with surfaces, to describe Lefschetz fibrations. We found several close relations between some data in mapping class groups and smooth structures on total spaces of Lefschetz fibrations in this research.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：4次元多様体 写像類群 Lefschetzファイバー空間 モノドロミー 有理ブローダウン 微分構造 ファイバー和 チャート表示

### 1. 研究開始当初の背景

4次元多様体の位相幾何学(トポロジー)は、1980年代初頭のFreedmanとDonaldsonによる画期的な研究により多くのことが解明され、新しい時代を迎えた。Donaldsonの仕事の流れを汲む諸研究は、今なお低次元トポロジーの主流の一つであり続けている。一方で、まだ4次元多様体の全体像が見えてきたとは言いがたく、大きな予想が次々と解決されている3次元多様体のトポロジーとは対照的に、4次元多様体に関しては単連結なものに限っても完全な分類には程遠いのが現状である。

Lefschetz ファイバー空間はもともとLefschetz が射影代数多様体の位相幾何学を研究した際に導入したLefschetz pencilに由来する概念であり、楕円曲面の微分同相類の決定においても重要な役割を果たしたが、DonaldsonとGompfにより4次元シンプレクティック多様体との密接な関係が明らかにされるに至ってその研究が活発化した。4次元多様体にLefschetz ファイバー空間の構造を考えることの利点は、モノドロミー表現を通して曲面の写像類群との密接な関係が生じることである。すなわち、Lefschetz ファイバー空間の同型類は写像類群の右向きDehn ツイストについての正の関係子の初等変形類と1対1に対応する。これは、4次元シンプレクティック多様体の位相幾何学的な研究が、写像類群の元の組み合わせ的な研究に帰着されることを意味している。

研究代表者は1996年頃から曲面上の曲面束という特殊な4次元多様体に興味をもち、特にMeyerの符号数コサイクルを用いて詳しく調べていた。その副産物として超楕円的なLefschetz ファイバー空間の符号数が特異ファイバーに局所化する現象を捉えていたが、この時期に河澄響矢氏(東京大学)の主催する研究集会において森藤孝之氏(慶應義塾大学)の講演を聴く機会に恵まれ、それに触発されてLefschetz 型の特異ファイバーの局所符号数を決定した。同時期に、足利正氏(東北学院大学)と荒川達也氏(群馬高専)による超楕円曲線束に対するHorikawa指数の研究や、DonaldsonとGompfによる上記の研究が現れたこともあり、研究代表者は特異ファイバーをもつ4次元ファイバー空間の研究へと自然に導かれた。これまでに、Lefschetz ファイバー空間の符号数をモノドロミーに内在する写像類群の関係子に関係づけた永見誠二氏(摂南大学)との共同研究、Lefschetz ファイバー空間の幾何を写像類群の有界コホモロジーに応用したD. Kotschick氏(ミュンヘン大学)との共同研究、1970年代のChakirisによる種数2の代数曲線束に関する先駆的な研究をトポロジーの観点から復古・一般化した研究など、様々な観点からLefschetz ファイバー空間の研究を行っている。

### 2. 研究の目的

本研究課題は、曲面の写像類群の代数的理論と4次元多様体の位相幾何学との相互関係を深化・発展させることを目的として実施された。より具体的には、曲面によるファイバー構造を一部あるいは全体にもつような4次元多様体の位相構造・微分構造・不変量を、写像類群の表示・コホモロジー・表現などとの関係から解明することを目的とした。

具体的な研究課題として取り上げたものは次の3つである。

(1) 4次元多様体の種々の改変操作とLefschetz ファイバー空間との関係の解明：4次元多様体の改変操作としてよく知られたものには、対数変換、結び目手術、ファイバー和、有理プロダクション、連結和、分岐被覆などがある。一方、写像類群にはbraid, chain, lantern, star, hyperellipticなどの様々な関係子が知られており、これらを用いてLefschetz ファイバー空間のモノドロミーを書き換えることができる。そこで、写像類群のよく知られた関係子によるモノドロミーの書き換えによって、Lefschetz ファイバー空間がどのように改変されるのかを明らかにする。

(2) Torelli 群の情報を含むようなLefschetz ファイバー空間の不変量の構成：Lefschetz ファイバー空間のEuler 標数、符号数、スピン構造の有無については、Smith, Stipsicz, Ozbagci や、永見誠二氏と研究代表者の研究により計算方法は確立されたと言ってよい。これらは4次元多様体のホモトピー不変量であり、モノドロミーの観点からは、一般ファイバーの1次元ホモロジー群への写像類群の作用のみから決まる不変量である。そこで、Lefschetz ファイバー空間のより精密な不変量、特に写像類群のシンプレクティック表現を経由しない不変量の構成を目指す。

(3) broken Lefschetz fibration の具体例の組織的な構成：2005年のAuroux, Donaldson, Katzarkovによる論文に端を発するbroken Lefschetz fibrationの研究は、その後いくつかの注目すべき結果が現れたものの、不変量や具体例の構成などにまだなすべき課題が多く残っている。そこで、Lefschetz ファイバー空間の構成に用いた手法をbroken Lefschetz fibrationの具体例の構成に生かす。また、broken Lefschetz fibrationの同型類を特定するための代数的な情報を写像類群の言葉で書き下す。

### 3. 研究の方法

上記の項目2で述べた研究の目的を踏まえ、実際の研究を行う際に採った研究方法は以下のようなものである。

- (1) 写像類群の関係式による置き換えを用いたモノドロミーの構成。
- (2) Lefschetz ファイバー空間のハンドル分解から定まるKirby 図式とその変形。
- (3) 一般化されたチャートを用いた

Lefschetz ファイバー空間のモノドロミーの記述。

(4) 符号数コサイクルから導かれた符号数公式に基づく符号数の計算。

(5) Seiberg-Witten 理論やシンプレクティック幾何を用いた Lefschetz ファイバー空間の同型判定。

#### 4. 研究成果

項目2で述べた3つの研究課題のうち、特に(1)に関して芳しい進展がみられた。また、(2)についても今後の発展につながる重要な着想がいくつか得られた。一方、(3)については、他の研究者によって目覚ましい結果が得られた。(1), (2)について、具体的に得られた結果を以下に詳述する。

(1) 4次元多様体の改変操作と Lefschetz ファイバー空間の関係については、T. Mark (ヴァージニア大学) J. Van Horn-Morris (アーカンソー大学) 両氏との共同研究により、Fintushel-Stern の有理ブローダウンに対応する写像類群の関係式をすべて発見することができた。これにより、当初の目的はひとまず達成された。さらに、Park, Stipsicz, Szabo, Wahl による一般化された有理ブローダウンに対応する写像類群の関係式をも発見することができた。また、関係式に置き換えによって有理ブローダウンを実現するような具体例を構成することもできた。これらの結果は平成23年に Journal of Topology 誌に発表された。Y. Z. Gurtas (クインズボロー大学) との共同研究によって得られた結果は、アメリカ数学会の機関誌に発表された。コルクツイストやブラグツイストとモノドロミーの関係については、浮田卓也氏 (東京工業大学大学院生) によって非常に興味深い結果が示されており、その詳細を知る機会に恵まれた。

(2) Lefschetz ファイバー空間の新しい不変量の構成に関しては、鎌田聖一氏 (大阪市立大学) と共にチャート表示を用いたアプローチを行い、いくつかの着想を得た。これらの中から新しい不変量が構成される可能性があり、本研究課題終了後も研究を継続することにした。また、一般の種数の超楕円的な Lefschetz ファイバー空間のチャート表示の研究を鎌田氏と行い、超楕円的 Lefschetz ファイバー空間のファイバー和に対する安定化定理を証明した。さらに、ファイバー和によって安定化する具体例の構成にも成功した。このようなチャートの応用については、田中心氏 (東京学芸大学) や長谷川功氏 (厚生労働省) も交えて共同研究を行い、不変量の構成・安定化定理の証明・同型の判定など、様々なチャートの可能性について考察中である。尚、鎌田氏との最初の共同研究による結果は、Topology and its Applications 誌に掲載が決定した。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計3件)

Hisaaki Endo and Seiichi Kamada, Chart description for hyperelliptic Lefschetz fibrations and their stabilization, *Topology and its Applications* に掲載決定, 査読あり, URL: <http://arxiv.org/abs/1306.2707>

Hisaaki Endo, Thomas E. Mark, and Jeremy Van Horn-Morris, Monodromy substitutions and rational blowdowns, *Journal of Topology*, Vol. 4 (2011), 227—253, 査読あり, DOI: 10.1112/jtopol/jtq041

Hisaaki Endo and Yusuf Z. Gurtas, Lantern relations and rational blowdowns, *Proceedings of the American Mathematical Society*, Vol. 138 (2010), 1131—1142, 査読あり, DOI: 10.1090/S0002-9939-09-10128-4

[学会発表](計10件)

遠藤久顕, 超楕円的 Lefschetz ファイバー空間の安定同型類について, 研究集会「Hurwitz action とその周辺」, 2013年1月5-6日(発表日: 1月5日, 13:30-14:10), 群馬大学荒牧キャンパス教育学部C棟C201

遠藤久顕, Lefschetz ファイバー空間のファイバー和による安定化について, 研究集会「リーマン面に関連する位相幾何学」, 2012年9月1-4日(発表日: 9月2日, 11:10-12:10), 東京大学大学院数理学研究科大講義室

遠藤久顕, Lefschetz ファイバー空間の安定化について, トポロジーセミナー, 2012年4月11日, 15:30—17:00, 東京工業大学西8号館W1101セミナー室

遠藤久顕, Irreducible Lefschetz fibrations, 研究集会「タイヒミュラー理論によるレフシェッツファイバーの研究の新展開」, 2011年12月16—18日(発表日: 12月17日, 16:00—17:00), アピカルイン京都・楓の間

遠藤久顕, Constructions and modifications of Lefschetz fibrations, 幾何セミナー, 2011年12月5日, 13:00—14:30, 大阪大学理学部E棟E301

遠藤久顕, Lefschetz ファイバー空間の構成と改変について, 第58回トポロジーシンポジウム, 2011年8月8—11日(発表日: 8月9日, 11:00—12:00), 筑波大学筑波キャンパス中地区第一エリア1H棟201

遠藤久顕, Lefschetz ファイバー空間に関するいくつかの話題, Workshop on Lefschetz fibration, broken Lefschetz

fibration, and related topics, 2011年3月29—30日(発表日:3月29日, 13:00—14:00), 九州大学西新プラザ中会議室

遠藤久顕, 写像類群の関係式による4次元多様体の改変について, 研究集会「リーマン面に関連する位相幾何学」, 2010年9月4—7日(発表日:9月5日, 14:45—15:45), 東京大学大学院数理科学研究科

Hisaaki Endo, Signature of Lefschetz fibrations and related topics, Intensive Lectures on Lefschetz fibration, from the 16<sup>th</sup> to the 19<sup>th</sup> of February (lectures given on the 16<sup>th</sup>, 17<sup>th</sup>, 18<sup>th</sup>, and 19<sup>th</sup> of February), 2010, Korea Institute of Advanced Study (KIAS), Seoul, Korea

遠藤久顕, Lantern relations, substitutions, and rational blowdowns of Lefschetz fibrations, Workshop: Category Theory, Computer Science and Topology, 2009年10月16—18日(発表日:10月17日), 信州大学理学部講義棟1階・第1講義室

〔その他〕

ホームページ等

[http://t2r2.star.titech.ac.jp/cgi-bin/researcherinfo.cgi?q\\_researcher\\_content\\_number=CTT100380203](http://t2r2.star.titech.ac.jp/cgi-bin/researcherinfo.cgi?q_researcher_content_number=CTT100380203)

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

遠藤久顕 (ENDO, Hisaaki)

東京工業大学・大学院理工学研究科・教授  
研究者番号: 20323777

### (2) 研究分担者

菊池和徳 (KIKUCHI, Kazunori)

大阪大学・大学院理学研究科・講師  
研究者番号: 40252572

### (3) 連携研究者

なし