

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 5月28日現在

機関番号：14501

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2011

課題番号：21540081

研究課題名（和文） 結び目空間の構造と不変量の研究

研究課題名（英文） Study on structures of knot space and knot invariants

研究代表者

中西 康剛 (NAKANISHI YASUTAKA)

神戸大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：70183514

研究成果の概要（和文）：結び目の構造と不変量を局所変形を通じて明らかにし、その発展として、結び目空間の構造を不変量と局所変形の観点からを究明することを目的としている。局所変形である交叉交換と Alexander 多項式に関する結び目空間の構造を研究した。また、 $\#$ move 1回で自明になるような合成結び目の構成方法を与えた。

研究成果の概要（英文）：We have studied structures and invariants of knots by local moves to research the structure of knot space. We give a result on the structure of knot space with respect to crossing changes and Alexander polynomials. We give a method to construct infinite families of composite knots with $\#$ unknotting number one.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2010 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2011 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：位相幾何学

科研費の分科・細目：幾何学

キーワード：結び目理論, 結び目不変量, 局所変形

1. 研究開始当初の背景

1937年にWendtにより導入された交叉交換と呼ばれる局所変形は、有限回作用させることで任意の結び目をほどくことができることから、結び目解消操作と呼ばれている。交叉交換が生成する結び目や絡み目の同値関係は、成分数と同じであることが知

られている。この同値関係はとても貧しい構造ではあるが、たしかに、結び目や絡み目の構造の一側面を抽出している。

1987年にMatveevが、1989年に研究代表者と村上斉が独立に導入したDelta moveも有限回作用させることで任意の結び目をほどくことができることから、一般化した結び目解消操作と呼ばれている。

Delta moves が生成する結び目や絡み目の同値関係は、成分数および対応する成分間の絡み数と同じであることが知られている。この局所変形は有限型不変量のひとつである 2 次の Vassiliev 不変量を記述できる。このことが、葉廣により C_n move に一般化され、結び目の n 次の Vassiliev 不変量を記述できる局所変形 であることが示された。

こうした観点にたつて、既存の局所変形や新に導入した局所変形を通じて 結び目や絡み目の構造や不変量の研究をすることは ひとつのアプローチになっていた。また、結び目空間に局所変形による構造を入れたときに どのような構造があるのか、例えば、均質性がどうか、について研究代表者により始められたばかりであった。

2. 研究の目的

結び目の構造と不変量を局所変形を通じて明らかにし、その発展として、結び目空間の構造を不変量と局所変形の観点からを究明する。

3. 研究の方法

(1) 局所変形の開発：本研究課題のコアで、新しい局所変形の発見、局所変形でうつりあう結び目に共通する結び目の構造を究明する。

(2) 有限型不変量：Vassiliev 不変量をはじめとする多様な結び目不変量に対応する結び目の構造を研究する。具体例としては、Vassiliev 不変量が一致する具体的な結び目の例を構成することを通じて、どのような結び目の構造が対応するのかを究明する。

(3) 分岐被覆空間：3 次元多様体への応用を含めて、分岐被覆空間の構造を研究する。具体例としては、3 move による絡み目の変化は非正則 3 重分岐被覆空間の Z_3 係数ホモロジー群に影響を与えないことが知られている。

(4) Gordian 複体：局所変形を定めたとき、その局所変形 1 回で移り合う $n+1$ 個の結び目の組を n 単体と定義することで、結び目全体の集合に単体的複体の構造が入る。この構造の解析を行う。また、この局所変形による一般化した結び目解消数が定義できるので、これらの評価を研究する。

(5) 曲面結び目への応用：曲面結び目の局所変形の発見及び応用を研究する。また、曲面結び目の不変量の開発と反映される構造を研究する。

4. 研究成果

(1) 局所変形である交叉交換と Alexander 多項式に関する結び目空間の構造を研究した。結び目の Alexander 多項式は、交叉交換 1 回で自明になるような結び目という条件を付けても障害にはならないことが知られていた。そこで、交叉交換 1 回で三葉結び目になるような結び目だとどうか、8 の字結び目、(5, 2) 型のトーラス結び目だとどうかと必要十分条件を与えることに成功した。この方法を用いて、monic な Alexander 多項式をもつ結び目に対して必要十分条件をあたえることができる。前者は研究代表者単著で投稿し査読中である。後者は岡田雄希との共同研究で掲載発表済みである。今後の課題は、monic でない Alexander 多項式をもつ結び目に対する研究である。

(2) 渋谷哲夫が導入した Delta move の特殊化として, non-self Delta move があるが, ここではもうひとつの特殊化として, non-self Delta move や non-self C_n move を考える。結び目や絡み目のどのような構造が対応するかを研究した。例えば, 結び目や絡み目が有限回の non-self Delta moves でうつりあうことと, (i) 成分数が一致する, (ii) 対応する成分の絡み数が一致する, および, (iii) 対応する成分の結び目型が一致する, ことが必要十分条件であることがわかった。つまり, 成分の結び目型を保存するような link homology に対応する局所変形が non-self Delta move である。この成果により, self Delta moves と non-self Delta moves の役割が明確になったといえる。この結果を精密化することにより, non-self C_n moves に関する成果が得られた。この研究は, 渋谷哲夫, 塚本達也, 安原晃との共同研究であり, 掲載発表済みである。

(3) 村上斉により導入された # move は重要な局所変形のひとつである。# move 1回で実現されるような局所変形を開発することにより, 以下の結果が得られた。坂井佐久子の 20 年前の結果である # move 1回で自明になる結び目の Conway 多項式の例を拡張していくつかの系列で与えることに成功した。# move による Gordian 複体の構造が Conway 多項式に関して均質ではないことを示した。この研究は, 中村拓司との共同研究であり, 掲載発表済みである。

(4) 仮想結び目の図式にふたつの群が対応することは知られていたが, どのような群

の対が実現できるかについて初めての結果を与えた。任意の 2 橋結び目群の対について, これを図式から定まる群の対とするような図式の構成方法を与えた。また, 概古典的結び目であることの判定条件を与えた。この研究は, 中村拓司, 佐藤進, 富山祐美との共同研究であり, 印刷中である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 4 件)

- (1) T. Nakamura, Y. Nakanishi, S. Satoh, and Y. Tomiyama: Twin groups of virtual 2-bridge knots and almost classical knots, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 21-8 (2012), 1250095-1-18. 査読有. DOI: 10.1142/S0218216512500952
- (2) T. Nakamura and Y. Nakanishi: Notes on sharp moves, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 21-7 (2012), 1250068-1-20. 査読有. DOI: 10.1142/S021821651250068X
- (3) Y. Nakanishi, T. Shibuya, T. Tsukamoto, and A. Yasuhara: On non-self local moves, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 21-4 (2012 April), 1250055-1-9. 査読有. DOI: 10.1142/S0218216511010097
- (4) Y. Nakanishi and Y. Okada: The differences of Alexander polynomials caused by a single crossing change, *Topology and Its Applications*, 159-4 (2012 March), 1016-1025. 査読有. DOI: 10.1016/j.topol.2011.11.023

[学会発表] (計 8 件)

- (1) 中西康剛: On knot diagrams, 研究集会「結び目の展望」, 早稲田大学教育学部, 2012. 3. 17-18.
- (2) 中西康剛: 結び目の局所変形について, 2011 琉球結び目セミナー, 那覇市伝統工芸館会議室, 2011. 9. 6-7.

- (3) 中村拓司, 中西康剛: Notes on sharp moves for knots, 東北結び目セミナー, 遊学館, 山形, 2010. 10. 22-24.
- (4) Y. Nakanishi and Y. Okada: The differences of Alexander polynomials caused by a single crossing change, International Conference Japan-Mexico on Topology and Its Applications, University of Colima, Colima, Mexico, 2010. 9. 27-10. 1.
- (5) Y. Nakanishi: Local moves and Gordian complexes, IV, The 2nd TAPU-KOOK Joint Seminar on Knots and Related Topics, Kyungpook National University, Daegu, Korea, 2010. 7. 26-30.
- (6) 中西康剛: Alexander polynomials of knots which are transformed into the trefoil knot by a single crossing change, 日本数学会トポロジー分科会, 慶応義塾大学矢上キャンパス, 2010. 3. 24-27.
- (7) Y. Nakanishi: Alexander polynomials of knots which are transformed into the trefoil knot by a single crossing change, The Sixth Asian School of Knots and Related Topics, Nankai University, P. R. China, 2010. 1. 25-28.
- (8) 中西康剛: Alexander polynomials of knots which are transformed into the trefoil knot by a single crossing change, 東北結び目セミナー, 山形テルサ, 山形, 2009. 10. 17-19.

[その他]

ホームページ等

<http://www.math.kobe-u.ac.jp/home-j/index7-1-10.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

中西 康剛 (NAKANISHI YASUTAKA)
神戸大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 70182514

(2) 研究分担者

佐藤 進 (SATO SHIN)
神戸大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号: 90345009

(3) 連携研究者

大山 淑之 (OHYAMA YOSHIYUKI)
東京女子大学・現代教養学部・教授
研究者番号: 80223981

内田 吉昭 (UCHIDA YOSHIAKI)
神戸薬科大学・薬学部・教授
研究者番号: 80280890