

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年4月10日現在

機関番号：17701

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2009 ～ 2011

課題番号：21540087

研究課題名（和文）：フィンスラー幾何学の大域的理論とその応用に関する研究

研究課題名（英文）：A global theory of Finsler geometry and its applications

研究代表者：愛甲 正 (Aikou Tadashi)

鹿児島大学・理工学研究科・教授

研究者番号：00192831

研究成果の概要（和文）：

本研究では、フィンスラー幾何学を fibered Riemannian 多様体の微分幾何学の観点から研究した。特に、実及び複素フィンスラー幾何学に関しては、この手法が有効な研究手法であることを示した。特に、本研究では実フィンスラー多様体の共形幾何学や、複素多様体上の正則ベクトル束の負性について、その射影化束の微分幾何学をフィンスラー幾何学とみなす事により研究した。更に、計量や接続の平均化という手法により、新しい結果を得た。

研究成果の概要（英文）：

In this research, we have investigated Finsler geometry using the method in the geometry of fibered Riemannian manifolds. We have shown that our method is effective in the study of real or complex Finsler geometry. In particular, in this research, we have investigated conformal geometry of real Finsler manifold, and the negativity of holomorphic vector bundles over a compact complex manifold through the study of the projective bundle associated with it. Further we have obtained some new results by using the averaged metrics and connections.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
2011年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総計	2,600,000	780,000	3,380,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：フィンスラー計量, フィンスラー多様体, Finsler-Kahler 計量, averaged metrics, averaged connection, Kahler fibration

1. 研究開始当初の背景

M. Abate-G. Patrizio 両氏による”Finsler

metrics - A Global Approach (Lecture Note in Mathematics, 1591(1994))の出版により,

実及び複素フィンスラー幾何学がその非専門家にも理解されるようになり、多くの研究者による研究成果が発表されるようになった。最近の特色ある研究として、元東北大学の西川青季氏により、フィンスラー幾何学における調和写像の理論がリーマン幾何学と同様に研究されるようになった。特に、調和写像の研究は、Frankel 予想の微分幾何学的証明を与えることが研究の発端となっており、負な正則ベクトル束を特徴付けることを目的とした小林氏の論文“Negative vector bundles and complex Finsler structures, Nagoya Math. J 57(1975), 153-166”が研究の出発点となっている。また、複素フィンスラー計量は小林計量に代表されるように、非エルミート計量であり、幾分複雑な面も持つが、コホモロジーの消滅定理等も成立し、その結果として、複素多様体の正則変換群の有限性の判定等屈の応用も研究されている（学会発表（3）参照）。

研究代表者は、研究開始当時、実フィンスラー幾何学を fibred Riemann 多様体の微分幾何学の手法を用いて研究していた。また、複素フィンスラー幾何学については、正則ベクトル束の射影化束の全空間がケーラー多様体であると仮定し、fibred Riemann 多様体として、その複素微分幾何学の研究の必要性を認識していた。（T. Aikou and L. Kozma, “Global Aspects of Finsler Geometry”, in Handbook of Global Analysis) (edited by D. Krupka and D. Saunders), Elsevier(2008), T. Aikou, “Finsler geometry on complex vector bundles”, in Riemann - Finsler Geometry, MSRI Publications 50(2004) 参照）。

研究開始後、計量や接続の平均化という研究手法が欧州の研究者により開発され、研究代表者は、特にこの手法に興味を持ちこの研究課題の研究手法に取り入れた（雑誌論文（1）及び学会発表（1））。

2. 研究の目的

本研究では、fibred Riemann 多様体の微分幾何学を応用することにより、フィンスラー幾何学における双対接続の幾何学、フィンスラー幾何学における調和写像の理論の研究、Kahler fibration の複素解析的研究等を fibred Riemann 多様体の大域的微分幾何学の観点から研究することを目的とした。

また、フィンスラー幾何学では、共形幾何学が十分に研究されているとは言えないことから、本研究ではフィンスラー幾何学における共形幾何学の研究手法の確立をも目的にした。本研究では以下の各項目について研究することを目的とした。

(1) 双対接続の幾何学とヘッセ幾何学と

の関連の研究

- (2) フィンスラー幾何学における調和写像の理論
- (3) 射影化束のスカラー曲率一定のケーラー計量の研究
- (4) Weil-Petersson タイプの計量の解析的研究

いずれの研究項目もフィンスラー幾何学を fibred Riemann 多様体または Kahler fibration の微分幾何学とみて解析するところに特徴があり、既によく知られている結果を応用することにより、これまで得られていなかった新しい結果を発見できる可能性は大きいと考えられている。また、特に、複素フィンスラー幾何学は、その研究手法として複素解析学、複素解析幾何学、複素微分幾何学等の活躍する舞台であり、研究の対象として多くの副産物の発見も期待できる。

3. 研究の方法

本研究にあたっては、微分幾何学的な領域については研究代表者が主に担当しベクトル束の微分幾何学の手法で研究した。また、複素解析幾何学の領域については宮嶋分担者が、複素解析的な領域については小櫃分担者が代表者に協力し研究を遂行した。

フィンスラー幾何学における双対接続の幾何学の研究については、研究代表者が主に行い、特にベクトル束の微分幾何学の立場から、従来の研究手法とは異なる方法で実施した。

フィンスラー幾何学における調和写像の理論については、研究代表者に宮嶋・小櫃分担者が協力する形で研究した。本研究では、任意のコンパクトなリーマン面から複素フィンスラー多様体への調和写像を扱い、フィンスラー多様体の曲率とリーマン面の種数との関連について研究した。主に、先行している研究成果の分析が主な研究結果であり、宮嶋・小櫃分担者の協力のもと、今後も研究継続する予定である。

複素多様体上の正則ベクトル束の射影化束の研究に関しては、一般 Kahler fibration は、複素多様体をパラメーター空間とする Kahler 多様体の複素解析族であるとの観点から研究した。特に、コンパクトな Kahler 多様体の場合、射影化束の全空間もコンパクトな Kahler 多様体になるが、この Kahler 計量の族はベクトル束のフィンスラー計量から定まることが示されている。したがって、射影化束の幾何学は、この意味で複素フィンスラー幾何学とみなしてよいことがわかる。この射影化束のケーラー計量がスカラー曲率一定の解き、対応する複素フィンスラー計量がどのような性質を許容するか

を研究した. その方法としては, 複素 Finsler 幾何学を複素解析族の幾何学の観点から研究し, その手法を応用した. 研究項目に関しては, 宮嶋分担者が研究代表者に協力し研究を遂行した.

Weil-Petersson タイプの計量の解析的研究については, 未だに研究成果と言えるものは得られていない. Kahler fibration を利用して底空間の Weil-Petersson タイプ計量を定義することは出来ている. つまり, Kahler fibration を複素多様体の解析族とみなしたとき, Kodaira-Spencer 類の内積を各ファイバー毎に積分する事により定空間にエルミート計量を定義できる. このエルミート計量がケーラー計量になるにはどのような仮定が必要かを検証した. 形式的に必要な条件は得られるが, それが幾何学的にどのような意味を持つかは未だにわかっていない. また, ケーラー計量になった場合, それが完備性を持つのかどうかも未だに分かってはいない. この研究項目については, G. Schurmacher 氏の Einstein-Kahler 多様体の (局所) モジュライの研究で導入された generalized Weil-Petersson 計量と同質なものであることが予想されている. 従って, この研究項目についても, 複素フィンスラー多様体の標準的な接続である Chern-Finsler 接続を用いて研究できると予想出来る. この研究項目に関しては, 代表者と Weil-Petersson 計量の専門家である小櫃分担者が協力して研究を遂行し, 今後も研究を継続する予定である.

4. 研究成果

双対接続の幾何学とヘッセ幾何学との関連の研究: 実フィンスラー多様体で標準的な接続であるベアワールド接続は, 自然な仮定より定まるが, 計量的ではないという欠点もあったが, 統計幾何学の観点からみれば自然な結果である事に気づき, ベアワールド接続がフィンスラー多様体の統計構造を与えることを示した. さらにその応用として, ベアワールド接続の水平方向への曲率が消えるフィンスラー多様体は自然なヘッセ構造を許容することを示した (学会発表 (4)).

複素多様体上の正則ベクトル束の豊富性の研究については, 上記の論文で示された小林の定理がよく知られており, その定理を Kahler fibration の微分幾何学の立場から再度解析することにより, いくつかの結果を南開大学 (天津市, 中国) で開催された国際会議で報告した (学会発表 (3)). 講演内容については, 論文 "Some remarks on negative vector bundles" として投稿予定である.

リーマン多様体の共形幾何学では, Weyl 接続が有効な接続であることがよく知られている. フィンスラー多様体の場合も, 平行移動が角度を保つという仮定の下で, Weyl 接続

と類似な Finsler-Weyl 接続を定義できる. この Finsler-Weyl 接続とその双対接続を用いてフィンスラー多様体の共形幾何学を研究する為に, その基礎的を研究した. 特に, Finsler-Weyl 接続の双対接続が Wagner 接続に他ならない事を発見し, 今までに知られている共形幾何学の結果を, Finsler-Weyl 接続を用いて再度検証した. この手法による共形幾何学の研究は未だ, 未開拓な部分も多く, 今後の発展が見込まれる. 共形幾何学についても, 計量の平均化と接続の平均化の手法を用いて, フィンスラー計量が局所的にベアワールド計量に共形的であるための条件を記述することが出来た (雑誌論文 (1) 及び (2), 学会講演 (1)). また, この平均化するという手法は強力な研究手法であり, 特に, 複素フィンスラー幾何学にも応用可能である. 古くから研究されていた Rizza 多様体のケーラー性について研究した. 特に, 複素フィンスラー多様体がある種のケーラー条件を満たす場合, その空間はすべてベアワールド空間という, リーマン空間に非常に近い空間となることを証明できた (学会発表 (5)). この研究成果は幾分か修正を加えた上で, 論文 "All Kahler-Rizza manifolds are Berwald spaces" として投稿準備中である.

その他, 現在までに知られている特殊なフィンスラー空間すなわち, ベアワールド空間とランズベルグ空間について, 大域的な立場から特徴付けを行うことが出来た. この新しい特徴付けは雑誌論文 (3) に発表した. この論文 (3) は, 未解決問題 "ベアワールド空間でないランズベルグ空間は存在するのか?" を意識した論文であって, この未解決問題に挑戦することも今後の研究課題としたい.

5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

- (1) Tadashi Aikou, Averaged Riemannian metrics and connections with application to locally conformal Berwald manifolds, to appear in Publ. Math. Debrecen 80 (2012). 印刷中, 査読有
- (2) Tadashi Aikou, Semi-parallel vector fields and conformally flat Randers metrics, Publ. Math. Debrecen. 78 (2011), 191-207. 査読有
- (3) Tadashi Aikou, Some remarks on Berwald manifolds and Landsberg manifolds, Acta. Math. Acad. Paedagogicae. 26 (2010), 139-148.

査読有

http://www.emis.de/journals/AMAPN/vol26_2/amapn26_13.pdf

- (4) Kimio Miyajima, Analytic construction of deformation of resolution of normal isolated singularities, J. Korean Math. Soc. 26(2009), 125-150. 査読有

[学会発表] (計5件)

- (1) Tadashi Aikou, Some remarks on averaged metrics and connections, The 46th Symposium on Finsler geometry, November 18, 2011, Shizuoka.
- (2) 小櫃邦夫, Takhtajan-Zogrof 計量の最近の話題, リーマン面に関する位相幾何学, 2011年9月6日, 東京大学大学院理学研究科
- (3) Tadashi Aikou, Remarks on special Finsler spaces - from geometrical view point, The 11th International Conference of tensor Society, September 5-10, 2010, University of Tokyo.
- (4) Tadashi Aikou, Negative vector bundles and complex Finsler geometry, International Conference on Finsler Geometry, Chern Institute(Nankai Univ.), China, June 21-25, 2010.
- (5) Tadashi Aikou, Some remarks on Kahlerian Finsler manifolds of Cartan type, Workshop on Finsler Geometry and Its Applications, Debrecen, Hungary, 2009, May 2-29.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

愛甲 正 (AIKOU TADASHI)

鹿児島大学・大学院理工学研究科・教授

研究者番号 : 00192831

(2) 研究分担者

宮嶋 公夫 (MIYAJIMA KIMIO)

鹿児島大学・大学院理工学研究科・教授

研究者番号 : 40107850

小櫃 邦夫 (OBITSU KUNIO)

鹿児島大学・大学院理工学研究科・准教授

研究者番号 : 00325763