

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年5月15日現在

機関番号：24402

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2011

課題番号：21540092

研究課題名（和文） DNA 結び目への応用を目指す結び目の局所変形の研究

研究課題名（英文） Study on local moves of knots with application to DNA knots

研究代表者

金信 泰造 (KANENOBU TAIZO)

大阪市立大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：00152819

研究成果の概要（和文）：結び目，絡み目の $H(2)$ 移動，バンド手術， $SH(3)$ 移動など種々の局所変形に関する研究をおこなった．とくに，これらの局所変形に関する2つの結び目の距離を評価するための様々な方法を与えた．その応用として，バンド手術で移り合う2つの絡み目のジョーンズ多項式や Q 多項式の特殊値に関する条件により，DNA の部位特異的組み換えに現れる酵素 Xer の位相的な作用の特徴付けに寄与することができた．

研究成果の概要（英文）： We studied several local moves on knots and links such as an $H(2)$ -move, band surgery, and $SH(3)$ -move. In particular, we gave several methods to estimate the Gordian distances between two knots. Then, using some relationships of the Jones and Q polynomials between two links which are related by a band surgery, we applied to DNA knot theory, helping us to understand the action of the Xer site-specific recombination at psi site.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	900,000	270,000	1170,000
2010年度	800,000	240,000	1040,000
2011年度	800,000	240,000	1040,000
総計	2500,000	750,000	3250,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：結び目，絡み目，バンド手術，DNA 部位特異組み換え

1. 研究開始当初の背景

DNA 分子は，複製，転写，組み換えという遺伝現象の核心をなす過程において位相的な構造が変化するが，それはトポイソメラーゼとよばれる酵素の働きによるものである．トポイソメラーゼとは，DNA の鎖を切断して，さらに結合するというような操作をおこなう酵素の総称である．トポイソメラーゼは環状の DNA に対して図 1 の交差交換や $H(2)$ 移動

のような作用をすると考えると結び目理論に应用することができる．このようにして結び目理論の研究を初めて DNA に応用したのが，1980 年代のエルンストとサムナーズの研究である．（文献 [ES]）すなわち，かれらは，生物学者が予想した，ある組み換え酵素の作用のモデルが数学的に正しいことを，結び目理論を利用して示すことに成功した．これに続く研究は，とくに欧米において盛んに進め

られているが、日本でも、デーモン手術の研究と関連して埼玉大学の下川航也等が研究をおこなっている。

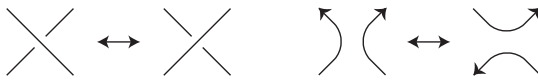


図 1. 交差交換と H(2) 移動

一方、結び目理論においては、局所変形の研究は古くから様々な形でおこなわれてきている。結び目をほどくことができる種々の局所的な変形が知られており、それらは結び目解消操作と総称されている。その代表的なものが交差交換であり、結び目をほどく交差交換の最小数のことを結び目解消数とよんでいる。現在でもゲージ理論等最新の理論を応用する詳細な研究が進められている。結び目の局所変形は様々な形で古典的結び目理論に現れている。例えば、Conway 多項式、Jones 多項式、HOMFLYPT 多項式等の多項式不変量は、局所的に異なる 3 個の結び目、絡み目の間のスケイン関係式を用いることで定義される。また、ヴァシリエフ不変量（有限型不変量）は葉広による局所変形である C_n 移動の理論で理解することができる。逆にいえば、結び目の局所変形の研究は、結び目の様々な不変量の研究に直結している。

また、DNA の研究とも関連して、高分子化学において、同様に、ひも状の高分子が結び目を作ったり、あるいは、絡んだりすることが知られており、このような現象の解析において結び目理論の応用が見込まれる。また、この場合は円周だけでなく、さらに広く空間グラフ、すなわち、グラフの埋め込みの研究も必要となる。数学理論がはっきりと大きな成果をあげて応用された例はないが、簡単な空間グラフの分類等の基礎的な研究が高分子化学で必要となっている。

文献 [ES] Ernst, C. and Sumners, D. W. : A calculus for rational tangles; Applications to DNA recombination, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 102 (1990) 489-515.

2. 研究の目的

DNA 結び目に作用する酵素の特徴付けを調べる分子生物学の研究への応用を目指しつつ、結び目、絡み目、空間グラフの局所変形の研究を進めることが本研究の目的である。具体的な問題を例としてあげよう。Xer system とよばれる酵素による DNA の組み換えにより、 $(2, 2m)$ 型トーラス絡み目 ($m=2, 3, 4, 5$) から、 $(2m+1)$ 個の交点をもつ結び目が得られることが実験によりわかっている (文献[BSC])。この Xer の作用は、結び目の H(2) 移動とよばれる局所変形であるこ

とが知られている。このとき結び目理論の問題となるのは、得られた $(2m+1)$ 個の交点をもつ結び目の特徴付けを求めることである。本研究での主目的は、結び目の局所変形で、とくに交差交換や、上の例であらわれた H(2) 移動 (図 1 参照) 等の結び目解消操作について、その結び目変形距離、すなわち、2 つの結び目が与えられたときに一方から他方に変形するための局所変形の最小回数に関する研究である。

以上の状況をふまえ、本研究では、DNA の組み換えの研究を念頭におきつつ結び目の局所変形とそれに関係する研究をおこなう。具体的には、つぎの 4 点に集中したい。

- (1) 結び目の H(2) 移動の研究
- (2) 結び目の交差交換に関する結び目の距離の研究
- (3) 結び目のシャープ移動の研究
- (4) 空間グラフの分類と局所変形の研究

それぞれについて説明する。(1) の H(2) 移動であるが、図 1 で示したように、結び目の向きが一部逆転するような結び目を結び目に変換する移動である。この変形を初めて研究したのは Lickorish (文献[L]) であるが、その後、Hoste, 中西, 谷山 (文献[HNT]) の論文で拡張した局所変形の研究がある。具体的に冒頭で示した問題が 1 つの目標となる。そのためには、与えられた 2 つの結び目、絡み目が与えられたときに一方から他方に変形するための H(2) 移動の最小回数を調べる必要がある。

(2) 交差交換の研究は、すでに結び目解消数に関する様々なアプローチがあり、本研究では、特に、与えられた 2 つの結び目の間の結び目解消距離について、多項式不変量を利用した研究を進めていきたい。

(3) シャープ移動 (図 2) は DNA の 2 重らせんを同時に切断する II 型のトポイソメラーゼの作用に対応する。シャープ移動は、村上 (文献[M]) によって結び目解消操作であることが示され結び目解消距離についての研究が始まったが、これについて最近の交代化数の研究と関連させて進めていきたい。



図 2. シャープ移動

(5) 空間グラフについてもすでに先行する様々な結果がある。とくに、ある空間グラフでは、いつも結び目を含むという Conway, Gordon の結果があり、一般に空間グラフの標準的なものを定めるのは困難で、ここに空間グラフの扱いにくさがある。これを解消して分類問題を考察するための局所変形の研

究が有効であると考えられる。さらに、特殊であるがよく現れる空間グラフであるシータ(Θ)曲線や手錠型グラフ(handcuff graph)の分類問題を有限型不変量の研究と関連させて進めていきたい。

文献

[BSC] Bath, Jonathan, Sherratt, David J., and Colloms, Sean D.: Topology of Xer recombination on catenanes produced by Lambda integrase, *Journal of Molecular Biology*, 289, Issue 4, 18 June (1999) 873-883.

[L] Lickorish, W. B. R.: Unknotting by adding a twisted band, *Bull. London Math. Soc.* 18 (1986) 613-615.

[HNT] Hoste, J., Nakanishi, Y. and Taniyama, K.: Unknotting operations involving trivial tangles, *Osaka J. Math.* 27 (1990) 555-566.

[M] Murakami, H.: Some metrics on classical knots, *Math. Ann.* 270 (1985) 35-45.

3. 研究の方法研究目的に沿った成果を得るために、当研究課題である『結び目』や『結び目の科学(とくにDNAや高分子化学)への応用』をテーマとするさまざまな研究集会等に参加し、結び目理論や低次元多様体論の話題に精通している多岐にわたる研究者との情報交換をおこない共同研究にあたった。とくに、大阪市立大学で開催される「Friday Seminar on Knot Theory」(毎週の結び目理論のセミナー)、および、大阪市立大学文化交流センターで開催される京阪神地区の研究者が一同に会する「KOOK セミナー」には積極的に参加した。実際、研究代表者、分担者がこれらのセミナーの運営を担っている。また、コンピュータを利用した結び目の多項式不変量の計算が当研究において、決定的に重要な役割を果たしたことも注意したい。

4. 研究成果

(1) 結び目のH(2)移動の研究. H(2)ゴルディアン距離は2つの結び目がH(2)移動で移り合うためのH(2)移動の最小数である。H(2)結び目解消数を評価するためのいくつかの方法はすでに与えたが、それらがそのまま平行して、H(2)ゴルディアン距離を評価する方法に拡張できることがわかった。すなわち、H(2)ゴルディアン距離が1の2つの結び目のアルフ不変量、符号数、ジョーンズ多項式の特異値の間の種々の条件、および、Q多項式の特異値を使ったH(2)ゴルディアン距離の評価を与えることに成功した。また、それらの方法を用いて7交点までの結び目の間のH(2)ゴルディアン距離の表を与えた。

(2) 結び目のバンド手術の研究. バンド手

術は結び目にバンドを張ることによりおこなわれる結び目の局所変形である。バンド手術で移り合う2つの絡み目の間のジョーンズ多項式の特異値、Q多項式の特異値に関する条件を与えた。その応用として、リボン・フュージョン数(リボン結び目のフュージョンをおこなうリボンの最小数)の評価、および、DNAの部位特異的組み換えに現れる酵素の位相的な特徴付けに寄与することができた。すなわち、(6,2)型トーラス絡み目になっているDNA絡み目に組み替え酵素Xer CDが作用して、7交点のトーラス結び目をなすDNA結び目が得られることが知られている。この作用はバンド手術による変形である。そこで、一般に、(2n,2)型トーラス絡み目から(2n+1)交点の結び目への1回のバンド手術による変形の特徴付けが問題となる。当研究では、2つの7交点の結び目が(2,6)型トーラス絡み目のバンド手術で得られないことを証明した。これにより先行結果とあわせてn=3の場合に、この特徴付けの問題は解決されたことになった。

(3) 2成分の向きの付いた絡み目がバンド自明可能とは、1回の向きの付いたバンド手術によって自明な結び目に変形できるときをいう。与えられた2成分絡み目がバンド自明可能かどうかという問題に対して、9交点までの素な絡み目についてバンド自明可能性を決定することができた。そのために、符号数、ジョーンズ多項式、Q多項式、アルフ不変量を用いた。バンド自明可能絡み目の4次元種数は0なので、9交点の素な絡み目の4次元種数についても調べた。さらに、2n+1交点の2本橋結び目が(2,2n)型トーラス絡み目からバンド手術で得られるかという問題についても若干の進展をみた。

(4) 空間グラフの有限型不変量の研究. 3正則空間グラフの最も簡単なものとして、シータ曲線と手錠型グラフがあり。シータ曲線の埋め込みについては、位数4までの有限型不変量の空間の基底が知られている。そこで、手錠型グラフについて位数3までの有限型不変量の空間の基底を調べた。結果は、手錠型グラフの2成分部分絡み目の情報だけで、切断辺の埋め込みの情報は現れないことがわかった。しかし、石井敦氏のコンピュータによる計算結果から、2成分絡み目の位数4の空間の基底を比較してみると、切断辺の情報が位数4で現れることがわかる。今後、この結果を精査する必要がある。

(5) バンド手術と、SH(3)移動、デルタ移動、ガンマゼロ移動など他の結び目の局所変形との関係を調べた。SH(3)移動、デルタ移動、ガンマゼロ移動は結び目解消操作で、それぞれ結び目解消数が定義される。とくに、9交点までの結び目のSH(3)結び目解消数を決定することができた。また、デルタ結び目

解消数はSH(3)結び目解消数以上であることを使って、あらたにある結び目についてデルタ結び目解消数を決定することができた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計10件)

- ① Kanenobu, Taizo, Band surgery on knots and links, II, Journal Knot Theory and Its Ramifications, Vol. 21, No. 9 (2012). 査読有.
DOI: 10.1142/S0218216512500861
- ② Kanenobu, Taizo and Sugita, Kaori, Finite type invariants of order 3 for a spatial handcuff graph, Topology Appl., Vol. 159, Issue 4, (2012) 966-979. 査読有.
DOI: 10.1016/j.topolo.2011.11.016
- ③ Kanenobu, Taizo, H(2)-Gordian distance of knots, Journal Knot Theory and Its Ramifications, Vol. 20, No. 6 (2011) 813-835. 査読有.
DOI: 10.1142/S0218216511008991
- ④ Kanenobu, Taizo, Upper bound for the alternation number of a torus knot, Topology Appl., Vol. 157, Issue 1 (2010) 302-318. 査読有.
DOI: 10.1016/j.topol.2009.04.025
- ⑤ Kanenobu, Taizo, Band surgery on knots and links, Journal Knot Theory and Its Ramifications, Vol. 19, No. 12 (2010) 1535-1547. 査読有.
DOI: 10.1142/S0218216510008522
- ⑥ Kanenobu, Taizo, Sharp-unknotted number of a torus knot, Kyungpook Math. J., 49 (2009), 583-594. 査読有.
- ⑦ Kanenobu, Taizo, and Miyazawa, Yasuyuki, H(2)-unknotting number of a knot. Communications in Mathematical Research. Vol. 25, no. 5 (2009) 433-460. 査読有.
- ⑧ Kanenobu, Taizo, The block numbers of 2-bridge knots and links, Kobe J. Math. Vol. 26, No. 1-2 (2009) 1-15. 査読有.
- ⑨ Kawauchi, Akio and Tayama Ikuo, Enumerating 3-manifolds with lengths up to 9 by a canonical order. Topology Appl. Vol. 157, No. 1, (2010) 261-268. 査読有.
DOI: 10.1016/j.topol.2009.04.028
- ⑩ Moriuchi, Hiromasa, A table of θ -curves and handcuff graphs with up to seven crossings. Noncommutativity and singularities, 281-290, Adv. Stud.

Pure Math., 55, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2009. 査読有.

[学会発表] (計5件)

- ① 金信泰造, Band surgery on knots with applications to other local moves, アメリカ数学会2012年春季特別会議, 2012年3月4日, アメリカ合衆国ハワイ大学.
- ② 金信泰造, Ribbon torus knots presented by virtual knots with up to 4 crossings, The 19th TAPU Seminar on Knots and Related Topics, 2011年9月14日, 韓国釜山 Seacloud Hotel.
- ③ 金信泰造, Band surgery on 2-component links, 第3回KOOK-TAPU合同Seminar, 2011年7月25日, 大阪市立大学.
- ④ 金信泰造, Finite type invariants for a spatial handcuff graph, 第5回日本・メキシコトポロジー国際会議, 2010年9月30日, メキシコ コリマ大学.
- ⑤ 金信泰造, H(2)-Gordian Distance of Knots, 結び目・絡み目に関する第6回東アジアスクール, 2010年1月26日, 中国南開大学陳省身数学研究所.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

金信 泰造 (KANENOBU TAIZO)
大学院理学研究科・教授
研究者番号: 00152819

(2) 研究分担者

河内 明夫 (KAWAUCHI AKIO)
大学院理学研究科・教授
研究者番号: 00112524
森内 博正 (MORIUCHI HIROMASA)
大学院理学研究科・特任准教授
研究者番号: 20453128
田山 育男 (TAYAMA IKUO)
大学院理学研究科・研究所員
研究者番号: 00382036

(3) 連携研究者

宮澤 康行 (MIYAZAWA YASUYUKI)
山口大学大学院理工学研究科・教授
研究者番号: 60263761