

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 4 月 19 日現在

機関番号：32621

研究種目：基盤研究(C)

研究期間 2009～2011

課題番号：21540093

研究課題名（和文） 一般化されたケーラーアインシュタイン計量の研究

研究課題名（英文） Study of generalized Kähler-Einstein metrics

研究代表者

辻 元 (TSUJI HAJIME)

上智大学・理工学部・教授

研究者番号：30172000

研究成果の概要（和文）：小平次元が非負の射影多様体の射影族の上の標準体積形式の対数多重劣調和性とザリスキ開集合上で無限回微分可能であることを示した。その応用として、相対多重標準系の直像の大域生成性を証明した。これは特に飯高予想の肯定的な解決を意味する。証明にはモンジュアンペール複素葉層構造を用いる。

研究成果の概要（英文）：I have proved that the logarithmic plurisubharmonicity of the canonical measure on a smooth projective family of nonnegative Kodaira dimension and the smooth dependence of the canonical measure on the family. As an application, we have proven the global generation of the direct image of the pluricanonical systems. This result gives the affirmative answer to Iitaka's conjecture. The proof uses the Monge-Ampere foliation.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2010年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2011年度	1,100,000	330,000	1,430,000
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：複素多様体論

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：ケーラー多様、アインシュタイン計量、ベルグマン核

## 1. 研究開始当初の背景

- (1) 研究開始当初は、所謂、標準測度の定義とその存在が知られていたが、その詳しい性質は分かっていなかった。
- (2) 特に、この標準測度の射影族における、パラメータ依存が、可微分性を持つかどうか、という問題は極めて難しい問題だと感じていた。
- (3) なぜならベルグマン核による近似による標準測度の記述からだけでは、ベルグマ

ン核の可微分性は分かってもそれがどうやって、標準測度の可微分性に影響するのかが不明だったからである。

- (4) ベルグマン核の変動については Berndtsson らによって、その対数多重劣調和性が既に知られていた。
- (5) 一方、ケーラー・アインシュタイン計量をベルグマン計量の極限として表す方法は、代表者により、既に知られていた。

- (6) ケーラー・アインシュタイン計量の一般化である、標準測度については、その存在を、代表者及び Song-Tian が示していた(2008年)。
- (7) 従って、標準測度をどうやって、ベルグマン核の極限として表すのか、が本研究の中心課題であった。さらに、その変動については、詳しいことは分かっていた。

## 2. 研究の目的

- (1) 一般化されたケーラーアインシュタイン計量である標準測度 (canonical measure) をベルグマン核の極限として表示すること。
- (2) その結果として、標準測度の対数多重劣調和性を証明すること。
- (3) 標準測度が射影多様体の射影族の上で生成点の上で滑らか(可微分)であることを証明すること。
- (4) さらにその結果として多重標準系の直像の大域生成性を証明すること。
- (5) ケーラー多様体の上のリッチ流の特異解の構成を行うこと。
- (6) その特異解の射影族上の変形について、その対数多重劣調和性を証明すること、即ち、特異解の変動が時間によらずに、対数多重劣調和であることを証明すること。

## 3. 研究の方法

Caucher Birkar, Sebastian Boucksom らと共同研究を行うとともに、Jian Song, Ben Weinkove らと研究上の discussion をおこなった。特に Sebastian Boucksom とはケーラー・リッチ流の研究を行った。また Birkar-Chen と共著で、対数的小平次元に関するアーベル多様体の上の飯高予想の証明を行った。この間、海外の様々なシンポジウムに参加し講演を行うとともに、上に挙げたような数学者との研究上の討論を行った。

参加した主なシンポジウムは

- (1) Kähler-Einstein metrics Leminy 2011 年3月

- (2) Shokurov's conference, Edinburgh 2010年12月

- (3) Invariants in algebraic geometry, 東大 2009年11月

- (4) Kähler-Ricci flows Banff Canada 2008.6月

である。特に Sebastien Boucksom とは、長時間にわたり、共同研究を行った。

## 4. 研究成果

以下のような研究成果が得られた。

- (1) リッチ代入の方法を用いて、有理直線束の特異エルミート計量の構成問題とベルグマン核の力学系を結びつけることに成功した。
- (2) その結果として有理直線束の随伴直線束の射影族上のねじれケーラー・アインシュタイン計量の対数多重劣調和性を示すことに成功した。
- (3) さらに、それを用いることにより、標準測度の変動に関して、射影族上の対数多重劣調和性を示すことに成功した。
- (4) これと Viehweg のアイデアを用いて、相対標準束の弱安定性定理を得た。
- (5) その弱安定性定理と、標準測度の対数多重劣調和性を組み合わせて、射影族上の多重相対標準束の直像の大域生成性を証明した (以下の定理3参照)
- (6) ケーラー・リッチ流については Sebastian Boucksom と共同で、標準束が pseudoeffective という条件下で、時間大域的な特異解の構成を行った。これには、エネルギー法によるモンジュアンペール方程式の解の構成を応用した。
- (7) さらに、(1)で述べた方法と、ケーラー・リッチ流の差分方程式による近似を用いて、ケーラー・リッチ流の対数多重劣調和性を証明した。
- (8) さらにファイバーが小平次元0の代数多様体の場合について、類似の結果を得た。

以上の成果を集約する形で、定理を述べる。

まず、標準測度の対数多重劣調和性については、次の決定的な結果を得た。

定理 1  $f: X \rightarrow Y$  を小平次元が非負の射影多様体の滑らかな射影族とする。このとき相対標準測度を  $d\mu_{X/Y}$  とすると、 $d\mu_{X/Y}$  は  $X$  上で対数多重劣調和である。

さらに、標準測度のパラメータ依存性については、次の理想的な結果を得た。

定理 2  $f: X \rightarrow Y$  を小平次元が非負の射影多様体の滑らかな射影族とする。このとき相対標準測度を  $d\mu_{X/Y}$  とすると、 $X$  の空でないザリスキ開集合  $U$  が存在して  $d\mu_{X/Y}$  は  $U$  上で無限回微分可能である。

上の 2 つの定理から次の代数幾何学的な定理が得られる。

定理 3  $f: X \rightarrow Y$  を小平次元が非負の射影多様体の滑らかな射影族とする。このとき  $f_*K_{X/Y}^m$  は十分大きな  $m$  について常に大域切断で生成される。

以上の結果をもう少し拡張するには、次の 2 つの方向がある。

①ケーラー・リッチ流について、対数多重劣調和性を証明する。

②川又末端対について、定理を拡張する。

まず①については、S. Boucksom と共同で、ケーラーリッチ流の研究を行い。ケーラーリッチ流が初期データが半正値性を持つ場合には、半正値性を任意時間で保つことを証明した。

方法は、スケール付き極小モデル理論を用いる。

さらにリッチ代入の方法を用いて、射影族上の、ケーラー・リッチ流の対数多重劣調和性を証明した。この部分は、今まで使ってきたテクニックを総動員して証明した。

ケーラーリッチ流についての結果は、上で述べた、絶対的な結果のホモとピー版と見ることができる。

②について、川又末端対についても、同様の結果を得た。この研究は、ある意味で、必然的なもので、一般に射影代数多様体について

成り立つことは、多くの場合、川又末端対についても、成り立つことが多い。

川又末端対  $(X, D)$  に対しては、標準束の替わりに対数標準束を考えることになるが、これは、丁度、標準測度の場合、ねじれケーラー・アインシュタイン計量を考えるように、境界因子を扱うことに相当する。

その意味で、標準測度と本質的には、同じことを考えることになる。

このように考えることで、標準測度自身を、川又末端対について、考えることができ、これから、さまざまな代数幾何学的知見が得られる。

特に、川又末端対についての飯高予想について、Caucher Birkar-Junkai Alfred Chen と共同研究を行い、アーベル多様体上のファイバー空間については、肯定的な結果を得た。

ここで使った方法は、次元に関する帰納法と、正則切断の拡張定理であるが、代表者の担当したのは、拡張定理の部分である。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)  
プレプリント

(1)Hajime TSUJI: Global generation of relative pluricanonical systems, arXivmath.1012.0884

(2)Hajime TSUJI: Ricci iterations and canonical singular Kähler-Einstein currents on LC pairs, arXiv math.0904.5445

発表済み論文

(3)Hajime Tsuji: Semipositivity of Kähler-Ricci flows, RIMS kokyuroku 2012appear

(4)Hajime TSUJI: Canonical singular hermitian metrics on relative canonical bundles, American Jour. of Math. 133, (2011), pp. 1469-1501 DOI: 10.1353/ajm.2011.0047

(5)Hajime TSUJI, Dynamical construction of Kähler-Einstein metrics, Nagoya Math. J. 199 (2010), 107-122, 32Q20 (53C25)

〔学会発表〕（計 7 件）

- (1) 辻 元、Semipositivity of Kähler-Ricci flows :日本数学会春季総合分科会 2012 年 3 月 27 日、東京理科大学
- (2) 辻 元、Parameter dependence of singular Kähler-Einstein metrics, 2012 年 3 月 17 日、大阪大学
- (3) 辻 元、Semipositivity of twisted Kähler-Einstein metrics , Special Seminar, Institute Fourier. Mar. 4, 2012. フランス
- (4) 辻 元、Semipositivity of Kähler-Ricci flows, 数理研究集会 ベルグマン核とその周辺 2011 年 9 月 6 日、京都大学数理解析研究所
- (5) 辻 元、Variation of canonical measures on a smooth projective families, Differential Geometry and Complex Geometry, Leminy, 2011 年 3 月 19 日、マルセイユ、フランス
- (6) 辻 元、Canonical volume form on compact Kähler manifolds, Shokurov Conference 2010 年 12 月 11 日 エジンバラ、イギリス
- (7) 辻 元、On the variation of canonical volume form on smooth projective families, 複素幾何菅平シンポジウム 2010 年 10 月 26 日、長野県真田町菅平

〔図書〕（計 1 件）

辻 元、複素多様体論、サイエンス社、出版予定

〔産業財産権〕

○出願状況（計 0 件）

○取得状況（計 0 件）

〔その他〕

なし

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

辻 元 (TSUJI HAJIME)  
上智大学・理工学部・教授  
研究者番号 : 30172000

### (2) 研究分担者

なし

### (3) 連携研究者

なし