

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年3月31日現在

機関番号：32641

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2011

課題番号：21540094

研究課題名（和文） シンプレクティック商の大域的構造と不変量の研究

研究課題名（英文） Study of global structure and invariants of symplectic quotients

研究代表者

高倉 樹 (TAKAKURA TATSURU)

中央大学・理工学部・准教授

研究者番号：30268974

研究成果の概要（和文）：第一に、任意のコンパクト・リー群に対し、ワイル加群の不変部分空間の漸近的次元が、多重テンソル積の不変部分空間の漸近的次元に比例することを示した。第二に、重みを考えないベクトル分配関数の漸近挙動に対する既知の明示公式を、負の重みがある場合にも成り立つ形に一般化した。第三に、多重ウェイト多様体という空間を新たに導入し、ある種の仮定の下で、その体積に対する公式を与えた。

研究成果の概要（英文）：First, we showed that for any compact Lie group, the asymptotic dimension of the invariant subspace in the Weyl module is proportional to that of the invariant subspace in the multiple tensor product. Second, we obtained a formula for the asymptotic behavior of a vector partition function with possibly negative weights, which generalizes a known formula for a vector partition function without weights. Third, we introduced the notion of a multiple weight variety, and obtained a formula for its volume under certain assumptions.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2010年度	900,000	270,000	1,170,000
2011年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	2,800,000	840,000	3,640,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：シンプレクティック商、運動量写像、余随伴軌道、ベクトル分配関数、超幾何関数、多重ウェイト多様体

1. 研究開始当初の背景

群の作用をもつシンプレクティック多様体に対して、群作用による単なる商ではなく、運動量写像を用いて記述される一部分の商を考えると、再びシンプレクティック多様体になる。この空間をシンプレクティック商と

呼ぶ。各種のモジュライ空間がこのような構成で得られることからその重要性が認識されており、また、シンプレクティック多様体の族を構成的に与える方法としても有効である。

さて、幾何学的量子化の理論は、群作用を

もつシンプレクティック多様体と、群の表現との間の対応を与える。例えば、既約表現に対応する空間は余随伴軌道（旗多様体）である。群の表現においては、各種の操作（直和・テンソル積等）が標準的に定まるが、多様体におけるこれらの対応物がやはり自然な形で存在する。例えば、表現のテンソル積には多様体の直積が対応する。さらに、表現の既約分解（特に、各既約成分の重複度）の対応物を与えるのが、群作用の運動量写像とシンプレクティック商であることが知られている。

このように、群作用をもつシンプレクティック多様体とその商の構造は、群の表現論と深く関わる。そしてこの対応の応用が、研究代表者のこれまでの研究により蓄積されてきた。例えば、余随伴軌道の直積に対するシンプレクティック商のトポロジーを調べる際、表現論的なアプローチが大変有効であることが示されている。これらの研究成果をより包括的な形で発展させることを動機として、本研究課題を申請した。

2. 研究の目的

本研究の目的は、

(1) シンプレクティック商におけるよいクラスの設定

(2) 上記(1)のシンプレクティック商の大域的な構造を、各種の位相不変量を用いて明らかにすること

の2つであった。目的(1)は、背景欄で述べたような、表現と空間のカテゴリカルな対応に着目して、考察すべき対象を設定することを意味する。特に、新たな種類の空間を構成することも想定している。さらに目的(2)は、対象となるシンプレクティック商の不変量を可能な限り明示的に求め、その結果を大域的な構造の理解に応用することを意図とする。例えばその結果、対象となった空間族の中に対称性や双対性を見出すことが可能であれば、(1)の文中にあるような「よいクラス」であることが正当化されることになる。

研究期間中に明らかにすべき、より具体的な問題・目標としては、

①コンパクト・リー群の余随伴軌道に付随するシンプレクティック商の不変量の計算

②既約表現のテンソル積における重複度あるいはその類似と、漸近挙動の考察

③複素リー群の余随伴軌道に付随するシンプレクティック商の構造と不変量の考察を想定していた。

①、②は概ね表裏一体であるが、それぞれ固有の方向性をもつ。①は空間の幾何学的な結論を導くことが目標であり、②はリー理論や組合せ論に関わる帰結を意図している。これらについては、本研究課題の申請時まで未解決のまま残った問題が多く蓄積されて

いたため、その整理と解決が当初の課題であった。

3. 研究の方法

研究目的の達成のために、位相幾何学を専門とし各種の数式処理にも詳しい三好重明氏を研究分担者とした。また2009年度～2010年度には、表現論・代数解析学を専門とする落合啓之氏を連携研究者として研究組織に加えた。

役割分担としては、研究の目的欄に述べた具体的な問題・目標のうち、空間の位相的性質の考察および不変量の計算に関するプログラミング・数値計算・数式処理については高倉・三好が担当し、リー群・リー環の表現論に関わる部分を高倉・落合が担当した。また、期間全体を通して、研究代表者高倉は、研究全体を統括した。

研究を進める上での具体的な方法は、以下の通りである。

(1) 研究期間全体を通じ、本研究課題に関連する研究を行っている各地の研究者を訪問・招聘し、議論と情報交換を行い、研究を深める。

(2) 国内外での関連する研究集会に積極的に参加し、研究成果を発表するとともに、議論・情報交換と資料収集を行う。同時に、本研究課題を世に問う。

(3) 本研究課題に対する理解を深めるための情報・文献の収集を幅広く行う。

(4) 数値計算・数式処理については、必要に応じて、中央大学・理工学部・数学教室内の計算機室を使用する。

なお、研究経費として申請した諸費用は、すべてこれらの事項を遂行するために用いた。

4. 研究成果

(1) 第一に、任意のコンパクト・リー群に対し、既約表現とヤング図式からシューア関手として定まる表現（ワイル加群とも呼ばれる）における不変部分空間および重複度空間の次元の漸近挙動について考察した。その結果、いくつかの妥当な仮定の下で、ワイル加群の不変部分空間および重複度空間の漸近的次元は、テンソル積の不変部分空間および重複度空間の漸近的次元に比例すること、そしてその比例因子がヤング図式により決まるある定数で与えられること、を示した。したがって、ワイル加群に関する考察はテンソル積に関する考察へと帰着されることになる。なお、これらの漸近的次元の幾何学的意味は今のところ不明であるが、研究の目的の一つとして記した「シンプレクティック商におけるよいクラス」の設定と深く関わると思

われる。

(2) 第二に、不変量の計算における組合せ論的側面を抽出し、重み付きのベクトル分配関数の漸近挙動を考察した。特に、それが超幾何型の積分表示をもつことから、超幾何関数論と関連付けて考察した。具体的には、Brion と Vergne による分配多面体の体積に対する明示公式を、負の重みがある場合まで含めて成り立つ形に一般化した。今後この結果を、階数が高いリー群の余随伴軌道の直積空間のシンプレクティック商の研究や、超幾何関数論へ応用することができるものと期待される。

(3) 第三に、リー群の余随伴軌道の直積への極大トーラスの作用を基にして、多重ウェイト多様体というシンプレクティック商のクラスを設定し、その位相不変量について考察した。具体的には、A 型のリー群に限定して、商をとる位置に対応するパラメータがある特殊な小部屋に属するという仮定の下で、多重ウェイト多様体の体積の公式を与えた。その過程では、(2) で述べた重み付きベクトル分配関数の漸近挙動に関する結果が用いられる。特にリー群の階数が低い場合には、この公式は非常に明示的なものになり、原理的にはここで得られた公式からこの空間のホモロジカルな位相不変量がすべて求められることになる。

以上の内容は、「研究の目的」欄に記した「シンプレクティック商におけるよいクラスの設定」「各種の位相不変量を用いた大域的構造の解明」の重要な一例と位置づけられる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 4 件)

① Tatsuru Takakura, On vector partition functions with negative weights, RIMS Kokyuroku Bessatsu (掲載決定), 査読有。

② T. Suzuki and T. Takakura, Asymptotic dimension of invariant subspace in tensor product representation of compact Lie group, Journal of Mathematical Society of Japan, 査読有, Vol. 61, 2009, 921 - 969.

③ H. Kodama, Y. Mitsumatsu, S. Miyoshi and A. Mori, On Thurston's inequality for spinnable foliations, "Foliations, Geometry and Topology in Rio", AMS Contemporary Mathematics, 査読有, Vol. 498, 2009, 173 - 193.

④ S. Miyoshi and A. Mori, Reeb components and Thurston's inequality, "Foliations, Geometry and Topology in Rio", AMS Contemporary Mathematics, 査読有, Vol. 498, 2009, 195 - 206.

[学会発表] (計 10 件)

① 高倉樹, 「On multiplicity varieties」, 第 11 回名古屋国際数学コンファレンス「Topology and Analysis on Foliations」, 2012 年 3 月 21 日, 名古屋大学。

② 三好重明, 「Links and submersions on an open 3-manifold」, 多様体の平面場と微分同相群 2011, 2011 年 11 月 2 日, 東京大学玉原国政セミナーハウス。

③ 高倉樹, 「Intersection theory on double weight varieties」, 第 58 回幾何学シンポジウム, 2011 年 8 月 29 日, 山口大学。

④ 高倉樹, 「Vector partition functions with negative weights and some applications」, 研究集会「変換群の幾何と組合せ論」, 2011 年 6 月 14 日, 京都大学数理解析研究所。

⑤ 三好重明, 「A construction of a typical foliation on a 3-manifold」, 葉層構造と微分同相群 2010, 2010 年 10 月 27 日, 東京大学玉原国際セミナーハウス。

⑥ 高倉樹, 「On a vector partition function with negative weights」, 第 57 回幾何学シンポジウム, 2010 年 8 月 7 日, 神戸大学。

⑦ Shigeaki Miyoshi, 「A construction of a typical foliation on a 3-manifold」, "Geometry and Topology of foliations", 2010 年 7 月 12 日, Centre de Recerca Matematica, Bellaterra, Barcelona, Spain.

⑧ 高倉樹, 「負のウェイトをもつベクトル分配関数とその応用」, 研究集会「接触構造、特異点、微分方程式及びその周辺」, 2010 年 1 月 28 日, 洞爺湖文化センター。

⑨ 高倉樹, 「On a vector partition function with negative weights」, 福岡微分幾何研究会, 2009 年 11 月 22 日, 福岡大学セミナーハウス。

⑩ 高倉樹, 「テンソル積表現における重複度と付随するシンプレクティック商の幾何」, 第 56 回幾何学シンポジウム, 2009 年 8 月 31 日, 佐賀大学。

6. 研究組織

(1) 研究代表者

高倉 樹 (TAKAKURA TATSURU)
中央大学・理工学部・准教授
研究者番号：30268974

(2) 研究分担者

三好 重明 (MIYOSHI SHIGEAKI)
中央大学・理工学部・教授
研究者番号：60166212

(3) 連携研究者

落合 啓之 (OCHIAI HIROYUKI)
九州大学・数理(科)学研究科(研究院)・
教授
研究者番号：90214163