

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 25 日現在

機関番号：32690

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2011

課題番号：21540100

研究課題名（和文）基本群の間の全射準同型写像から定まる 3 次元多様体の間の半順序関係に関する研究

研究課題名（英文）Studies on partial orders on sets of 3-manifolds defined by epimorphisms between fundamental groups.

研究代表者

北野 晃朗（KITANO TERUAKI）

創価大学・工学部・教授

研究者番号：90272658

研究成果の概要（和文）：結び目群の間のメリディアンを保つ全射準同型写像から定まる半順序関係を 1 1 交点以下の場合に鈴木氏らとの共同研究で決定した。また任意の 2 橋結び目に対して、モンテシノス結び目が存在して、写像度 0 の写像から誘導される結び目群の間の全射準同型写像を許容するものが存在する事を証明した。さらに写像度が 0 でない写像から誘導される結び目群の間の全射準同型写像を許容しない 3 橋双曲的モンテシノス結び目と 2 橋双曲的結び目の組の例を見つけた。また、任意の結び目に対して、無限個の素数に対して、その素数を標数とする有限素体上の 2 次元特殊線型群への非可換表現が存在する事を証明した。

研究成果の概要（英文）：For the set of prime knots with up to 11-crossings, we determined the partial order relation defined by using meridian preserving epimorphisms between knots groups. We also proved that for any given 2-bridge knot there exists a Montesinos knot with an epimorphisms which is induced by a degree zero map. Further we found pairs of a 3-bridge hyperbolic Montesinos knot and a 2-bridge hyperbolic knot which is not induced from a nonzero degree map. For any knot, there exists a infinitely many prime numbers such that there exists a non abelian representation on its knot group in 2-dimensional special linear group over a finite prime field with such a characteristic.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009 年度	1,500,000	450,000	1,950,000
2010 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：トポロジー

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：3 次元多様体, 結び目, 基本群

1. 研究開始当初の背景

幾何学的に緩やかな条件の下で、3 次元多様体や結び目の間の写像度 1 の写像、あるいは基本群の間の全射準同型写像を用いる事により、それら 3 次元多様体や結び目の間に半順序関係が定義される事は古典的に知ら

れている。それら写像度 1 の写像や全射準同型写像は、多様体の間の同相写像の一般化であり、また全射準同型写像は代数的な対応物と考える事ができる。

何らかの多様体の複雑さをこの半順序は反映していると考えられるが、その幾何学的

な意味についてはまだ理論的に十分解明されているとは言えない。

写像度 1 の写像はホモトピー同値にある意味で近い写像という事ができるが、一方で基本群の間の全射準同型写像という事だけで、どの程度のコントロールが出来るかについては具体的な現象が十分解明されているとは言えない状況であった。

具体的な研究としては、結び目群の間のメリディアンを保つ全射準同型写像が定める素な結び目の半順序関係に関しては、10 交点以下の場合に、鈴木 - 北野の研究によって決定されている。また、それらの具体的に得られている写像に関しての写像度も調べられている。

これらの基本的な道具立ては、古典的な結び目のアレキサンダー多項式、有限素体上の 2 次元特殊線型群への表現とそれに付随するねじれアレキサンダー多項式である。これらを用いて、全射準同型写像の非存在を証明する事が可能となる。一方で、全射準同型写像の存在を証明するためには、幾何学的によく分かっている状況を除けば具体的に構成する必要がある。

2. 研究の目的

- (1) より具体的な現象を解明するために、これまで得られている 10 交点以下の場合のリストをさらに交点数の高い 11 交点の場合に拡張する研究、
- (2) 半順序関係の非存在を決定する基本的な道具立てである、有限体上の線型表現、あるいはそれに付随するねじれアレキサンダー多項式に関する基本的な研究、
- (3) サテライト結び目の場合の全射準同型写像の存在に関する研究

である。

3. 研究の方法

- (1) 10 交点以下の素な結び目の間の半順序関係の決定において、重要な役割を果たしたのは、アレキサンダー多項式、ねじれアレキサンダー多項式である。これらをコンピュータを用いて、様々な素数を標数とする有限体上で 2 次元特殊線型群への表現、そしてそれに付随するねじれアレキサンダー多項式を計算し、ソースのねじれアレキサンダー多項式をターゲットのねじれアレキサンダー多項式が割り切るかどうかを確認する事により、その 2 つの組の間には全射準同型写像が存在しない、すなわち、半順序関係が成り立たないという事

がわかる。従って、残った組み合わせに関しては、具体的に全射準同型写像をコンピュータを用いて探索する事により、リストが決定される。その際にメリディアンを保つという事と、結び目のビルディング表示という特殊な形の結び目群の表示を用いる事により探索が可能となる。

- (2) また 2 橋結び目を含むより広い結び目のクラスとしてはモンテシノス結び目という結び目のクラスが存在する。このクラスに制限する事により具体的に扱う事が可能となる。
- (3) 10 交点以下の結び目に関してはかなり具体的な研究が進んでいたため、それらをコアとするサテライト結び目を考える事により、具体的な研究を進める事が可能である。

4. 研究成果

(1) 堀江 - 松本 - 北野 - 鈴木 の共同研究により、11 交点以下の素な結び目において、結び目群の間のメリディアンを保つ全射準同型写像から定まる半順序関係を完全に決定した。

(2) 写像度 0 の写像が誘導する基本群の間の全射準同型写像の存在を具体的に構成する事により証明した。また、そのような現象は決して稀なものではなく、任意の 2 橋結び目に対して、あるモンテシノス結び目が存在して、写像度 0 の写像から誘導される結び目群の間の全射準同型写像を許容するものが存在する事を証明した。

(3) さらにそれらに関して、アレキサンダー加群の構造を詳細に調べる事により、写像度が 0 でない写像から誘導される結び目群の間の全射準同型写像は許容しない例を見つけた。より具体的には、全射準同型写像が存在する場合、2 つのアレキサンダー多項式の間には割り切れるという関係が存在する。この精密化として、その全射準同型写像が写像度が 0 ではない写像から誘導されている場合にアレキサンダー加群の間の写像が分解するという事実が知られている。得られている具体例に関してアレキサンダー加群の構造を具体的に調べる事により分解しないもの、すなわち写像度が 0 でない写像から誘導される結び目群の間の全射準同型写像は許容しない例を見つけた。

(4) 与えられた素数に対して、その素数を標数としてもつ有限素体上の 2 次元特殊線型群への非可換な表現が存在するかどうかを決定する事は一般的には難しい問題である。そこで、無限個の素数に対して、非可換表現が存在する事を証明した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

- (1) TERUAKI KITANO and TAKAYUKI MORIFUJI, Twisted Alexander polynomials for $SL(2;C)$ -irreducible representations of torus knots, to appear in Annali della Scuola Normale Superiore. 査読有り.
- (2) TERUAKI KITANO and MASAAKI SUZUKI, On the number of $SL(2;Z/pZ)$ -representations of knot groups, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, Volume 21, Issue 1(2012) 1250003, 査読有り. DOI:10.1142/S021821651100973X
- (3) KEIICHI HORIE, TERUAKI KITANO, MINEKO MATSUMOTO and MASAAKI SUZUKI, A Partial order on the set of prime knots with up to 11 crossings, J. Knot Theo. and its Rami. Volume 20, Issue 2, (2011), 275-303, 査読有り. DOI: 10.1142/S0218216511008747

[学会発表] (計 12 件)

- (1) TERUAKI KITANO, Linear representations over a finite field of a knot group and the Alexander polynomial as an obstruction, Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics 2012, 2012年3月5日, 広島大学.
- (2) TERUAKI KITANO, $SL(2, Z/d)$ -representations of a knot group and Alexander polynomial as an obstruction, The 8th East Asian School of Knots and Related Topics, 2012年1月10日, KAIST, 大韓民国.
- (3) TERUAKI KITANO, On the Alexander polynomial of a knot as an obstruction for linear representations of a knot group, Circle valued Morse theory and Alexander invariants, 2011年11月19日, 東京大学.
- (4) 新村正之-北野晃朗, Epimorphisms between knot groups and special values of colored Jones polynomials (II), トポロジーとコンピュータ 2011, 2011年11月13日, 名城大学.
- (5) TERUAKI KITANO, Linear representations over a finite field of a knot group and the Alexander polynomial as an obstruction, Peking University Topology seminar, 2011年10月12日, 北京大学, 中国.
- (6) 北野晃朗-森藤孝之, トーラス結び目のねじれ Alexander 多項式, 日本数学会年会, 2011年3月20日, 早稲田大学.
- (7) TERUAKI KITANO, Epimorphisms between knot groups and special values of colored Jones polynomials, トポロジーとコンピュータ 2010, 2010年9月8日, 東京工業大学.
- (8) 北野晃朗, 結び目の twisted Alexander 多項式入門, 東京女子大トポロジーセミナー, 2010年6月19日, 東京女子大学.
- (9) TERUAKI KITANO, Epimorphisms between knot groups, Peking

University Topology seminar, 2010
年5月10日, 北京大学, 中国.

- (10) TERUAKI KITANO, A partial order on the set of prime Knots, The 6th East Asian School of Knots and Related Topics, 2010年1月26日, Chern Institute of Mathematic, 南開大学, 中国.
- (11) 北野晃朗-鈴木正明, 素な結び目の間の半順序に関する幾つかの注意, 日本数学会秋期総合分科会, 2009年9月24日, 大阪大学.
- (12) 松本峰子-堀江啓一-北野晃朗-鈴木正明, 11交点以下の素な結び目の間の半順序について, 日本数学会年会, 2009年3月27日, 東京大学.

[その他]
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

北野 晃朗 (KITANO TERUAKI)
創価大学・工学部・教授
研究者番号: 90272658

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

森藤 孝之 (MORIFUJI TAKAYUKI)
慶應義塾大学・経済学部・教授
研究者番号: 90334466
鈴木 正明 (SUZUKI MASA AKI)
秋田大学・教育文化学部・准教授
研究者番号: 70431616