

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 5 日現在

機関番号：37111

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2009～2013

課題番号：21540102

研究課題名(和文) 4次元空間形内の共形平坦な超曲面の研究

研究課題名(英文) Research on conformally flat hypersurfaces

研究代表者

陶山 芳彦 (SUYAMA, Yoshihiko)

福岡大学・理学部・教授

研究者番号：70028223

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円、(間接経費) 930,000円

研究成果の概要(和文)：共形平坦な超曲面の研究を行い分類問題に向けての大きな成果を上げた。それは、1つの超曲面から共形同値でないような多くの超曲面を作り出す方法を見つけたことである。この事は、我々の共形平坦な超曲面の研究が高次元部分多様体論としての幾何学的可積分系の理論にまで進化した事を表している。この研究を進めて、微分幾何学の発展のために更に努力したい。主な結果を記す：各超曲面は1変数の随伴族を持つ。各超曲面は双対超曲面を持つ。双対超曲面の元の超曲面による積分公式を与えた。一般的には、この双対超曲面は元の超曲面の幾何学的性質を保存しない、また、超曲面の双対とその超曲面の共形変形から得た超曲面の双対は共形的に異なる。

研究成果の概要(英文)：We had a great progress in the study on generic conformally flat hypersurfaces of dimension 4. The most important result is that we found several kinds of transformations between these hypersurfaces. This means that our study on these hypersurfaces made progress to the theory of integral systems for higher dimensional hypersurfaces. Existence of transformations is useful for the construction of new hypersurfaces and for the study toward complete classification of these hypersurfaces: A hypersurface h has a one parameter associated family of hypersurfaces. Each hypersurface has a dual hypersurface. We gave an integral formula for the dual. Generally, the members of dual pair are not conformally equivalent, and both duals of a hypersurface and its change by a conformal transformation are also not. There is a one to one correspondence between dual pairs of hypersurfaces and Ribaucour pairs of Guichard nets. We gave an algebraic method for a Guichard net to construct its Ribaucour partner.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・微分幾何

キーワード：conformally flat hypersurface Guichard net associated family dual hypersurface Ribaucour pair Goursat transformation

1. 研究開始当初の背景

空間形内の、generic で共形平坦な 3 次元超曲面の分類問題は、1917 年の Cartan の論文以来 open problem となっている。そして、このような超曲面の存在問題は、Guichard net と呼ばれる座標系とある種の 3 次元計量の組みの存在と同値である事が知られている。

しかし、Guichard net 或いは generic で共形平坦な 3 次元超曲面の例はほとんど知られていない。私は以前の論文で、この Guichard net を使って、generic で共形平坦な 3 次元超曲面の初めての非自明な例を空間形内に構成し、これらの超曲面の幾何学的性質を調べた。そして、そのような性質を持つ超曲面を幾何学的・解析学的に分類していた (cyclic Guichard net を持つ超曲面)。

2. 研究の目的

上の背景で述べた結果を踏まえ分類問題への道筋として、この研究では、新しい Guichard net を数多く求める方法を構築し、それらの幾何学的・解析的性質を解明する事 (共形構造としての超曲面の解明) を第一の目的とした。

また、Guichard net の存在とそれに対応して定まる空間形内の超曲面の実際の構成には大きな gap があるため、Guichard net から超曲面を空間形内に構成する方法を見出す事、またその幾何学的性質 (超曲面の外的性質) を解明する事を第二の目的とした。

3. 研究の方法

Guichard net を求める直接的方法は、これを定める微分方程式を解くことである。Guichard net は、4 連立の 3 階非線形微分方程式の解となる関数によって与えられる。また、これらの方程式は、1 つの関数から定まる 1 次微分形式と 2 次微分形式が閉になる事と同値である。従って、直接的方法では 2 つの微分形式が閉となるような関数を求めることが問題になり、この方法が見つければ、様々な Guichard net が構成できる事になる。研究の 2 番目の目標は、共形平坦な超曲面の間に作用する非自明な変換を見つけることである。このような変換を見つける事ができれば、その変換を作用させる事により、1 つの超曲面から幾何学的に様々な超曲面が構成できる。但し、この場合には、最初の超曲面の親戚となる超曲面が求まるということではあるが。

これら 2 つの方法を考えることが共形平坦な超曲面の分類問題を、高次元の幾何学的可積分系理論へと進化させることになり、微分幾何の発展のために重要な貢献を与えることになる。

4. 研究成果

この期間の研究により、共形平坦な超曲面の研究を、高次元部分多様体に関する幾何学的可積分系の理論にまで進化させるための多くの材料を作ること成功した。

第一の解析的方法により、新しい Guichard net を見つけた。この Guichard net の幾何学的・解析的性質を調べ、このような性質を持つ超曲面を幾何学的・解析的に分類した (Bianchi-type Guichard net を持つ超曲面)。

また、懸案となっていた一般的に Guichard net からユークリッド空間内の超曲面を構成する具体的方法を発見した。

第二の目標である超曲面の間の変換に関しては、特筆すべき成果があった。

先ず、1 つの超曲面に対し 1 変数で超曲面の随伴族が存在する。この随伴族に属する各超曲面は同じ Guichard net を持つが共形的には全て異なっている。

また、全ての超曲面は双対超曲面を持ち、一般的にはこの双対 pair は共形的に異なる超曲面の組みとなっている。更に、共形変換を施して得た超曲面の双対は、元の曲面の双対と共形的に異なる。この事から、1 つの超曲面から、多くの超曲面が構成できる事が分かった。また、双対超曲面の積分公式を元の超曲面の情報で与えた。

更に、超曲面の双対 pair には、Guichard net の Ribaucour pair が 1 対 1 に対応する事が分かった。この Ribaucour pair に属する Guichard nets は共形平坦な超曲面そのものではないが、超曲面の内的・外的な幾何学的性質を保存している。従って、Ribaucour pair は今後の研究において重要な道具になると思われる。また、1 つの Guichard net からその Ribaucour partner を代数的に求める方法を与えた。

これらの結果は、微分幾何学の発展のために、更に深めて研究する必要がある。

5. 主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 4件)

1 U. Hertrich-Jeromin & Y. Suyama, Ribaucour pairs corresponding to dual pairs of conformally flat hypersurfaces, to appear in Progress in Mathematics, Birkhauser. (査読有り)

2 U. Hertrich-Jeromin, Y. Suyama, K. Yamada & M. Umehara, A duality for conformally flat hypersurfaces, Preprint (2013). (査読有りの数学雑誌に投稿中)

3 U. Hertrich-Jeromin & Y. Suyama, Conformally flat hypersurfaces with Bianchi-type Guichard net, Osaka J. Math. 50(2013), 1-30. (査読有り)

4 Y. Suyama, Conformally flat hypersurfaces ---- Existence of an associated family and a dual hypersurface ----, 福岡大学微分幾何学研究会 2011 報告集、43-50. (査読無し)

〔学会発表〕(計 4件)

1 Yoshihiko Suyama, 幾何学講演会, 2014年3月25日, Fujian normal University, Fuzhou, China, Ribaucour pairs corresponding to dual pairs of conformally flat hypersurfaces.

2 Yoshihiko Suyama, International Workshop on Differential Geometry, 2014年2月15日, ホテル・ニュー伊万里, Ribaucour pairs corresponding to dual pairs of conformally flat hypersurfaces.

3 Yoshihiko Suyama, The fourth International Workshop on Differential Geometry, 2013年3月26日, 虹の松原ホテル, Conformally flat hypersurfaces ----Existence of an associated family, a dual hypersurface and a Ribaucour pair----

4 Yoshihiko Suyama, 福岡大学微分幾何研究会, 2011年11月3日, 福岡大学セミナーハウス, Conformally flat hypersurfaces ----Existence of an associated family and

a dual hypersurface----

〔図書〕(計 5件)

1 陶山芳彦, 福岡大学理学部応用数学科, 福岡大学微分幾何研究会 2013 報告集、2014, pp.207.

2 陶山芳彦, 福岡大学理学部応用数学科, 福岡大学微分幾何研究会 2012 報告集、2013, pp.145.

3 陶山芳彦, 福岡大学理学部応用数学科, 福岡大学微分幾何研究会 2011 報告集、2012, pp.188.

4 陶山芳彦, 福岡大学理学部応用数学科, 福岡大学微分幾何研究会 2010 報告集、2011, pp.149.

5 陶山芳彦, 福岡大学理学部応用数学科, 福岡大学微分幾何研究会 2009 報告集、2010, pp.108.

〔産業財産権〕
出願状況(計 0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況(計 0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

〔その他〕
ホームページ等 「無し」

6 . 研究組織

(1)研究代表者

陶山 芳彦 (Suyama Yoshihiko)

福岡大学、理学部・教授

研究者番号：70028223