様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２４年３月３１日現在

機関番号：　１１５０１
研究種目：　基盤研究（C）
研究期間：　2009～2011
課題番号：　２１５４０１０６

研究課題名（和文）　特異性の解を持つ偏微分方程式の精度保証付き数値解法の研究

研究課題名（英文）　Numerical Methods with Validation for Partial Differential Equations with Singularities

研究代表者
方　青　（QING　FANG）
山形大学・理学部・教授
研究者番号：10243544

研究成果の概要（和文）：
偏微分方程式は、様々な自然現象を表す数理モデルとして記述されているので、その数値解法の開発が偏微分方程式の理論に対してはもちろん、物理学、化学、生物学、工学、金融学など各分野の発展にも極めて重要な研究テーマである。本研究では、研究代表者は、研究分担者、連携研究者と研究協力者たちの協力を得て、１次元の２点境界値問題と２次元空間の中の多角形領域や円盤における特異性の解をもつ楕円型方程式の境界値問題について、高次精度の有限差分スキームの提案とその収束解析を行い、成果を得た。

研究成果の概要（英文）：
Since partial differential equations (PDE) are used to in mathematical modeling of various natural phenomena, the development of numerical methods and their numerical analysis for PDE is an important subject not only in the theory of PDE but also in the practical fields of physics, chemistry, biology, engineering, financial marketing, and so on. In this research project, the representative made progresses in the study of one-dimensional two-point boundary value problems and two-dimensional elliptic boundary value problems. Higher order numerical methods are proposed and numerical analysis of them is carried out.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2009 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2010 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2011 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総　計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：　数物系科学
科研費の分科・細目：　数学・数学一般（含確率論・統計数学）
キーワード：　微分方程式、境界値問題、特異性、有限差分法、有限要素法、誤差評価、高次精度

１．研究開始当初の背景

有限差分法はコンピュータが現れる前から微分方程式の数値解を求めるときに使われている古典的な方法である。その後に開発された有限要素法、境界要素法等は弾性力学、固体力学、電磁学を含む工学などの分野では活躍されている。ただし、いずれの方法に対

しても、その精度保証付きの誤差解析の理論はほとんど滑らかな問題にしか行われていない。一方、反応拡散方程式、移流拡散方程式など、複雑な現象を表す多くの方程式に特異性をもつ問題がある。これら方程式のデータ（方程式の係数関数、領域の境界、境界-初期条件、外力項等）のいずれかが特異性を持つので、今まで偏微分方程式に対する数値解の誤差解析の数学的理論では誤差評価がほとんど知られていない。特異性の解を持つ偏微分方程式に対して、より優れる（精度保証付き）数値計算法の開発とその解析を行うことが必要になっている。

２．研究の目的

(1) 楕円型方程式の境界値問題に対して、解の一意性を数値数学の観点から考察する。離散システムの解の一意性と連続問題の解の一意性の間に特徴づけの研究を行う。

(2) 楕円型方程式の一般的な境界値問題に対して、伸長変換を施すことにより、領域の境界近辺で解の微分が発散しても、高次精度の有限差分法の提案とその近似解の収束解析を行う。

３．研究の方法

(1) 研究代表者である方青は数値解析の立場から、国内、海外の研究者との交流を図りながら研究を進める。２次元の境界値問題に対する有限差分近似に対しては、非一様な領域分割上の収束オーダーが最良になるかという課題はまだ解決されていないが、結合的な数値解法の精力的な研究で解決されることが期待できる。

(2) 研究分担者の河村は、関数解析の立場から、Sobolev 関数空間において数値解の連続ノルムと離散ノルムの関係の研究を進め、超収束の誤差評価を行う。

(3) 連携研究者の澤田は、計算機代数学の立場から、大規模線形システムの反復解法の研究と適用を担当することになる。

(4) 連携研究者の西村は、並列計算による数値解法の検証とアルゴリズムの開発を担当することになる。

４．研究成果

(1) 境界特異性をもつPoisson型方程式の有限差分法の Effective 条件数に関する研究

以下の Poisson 方程式の混合境界値(Dirichlet と Robin 境界値条件)問題の数値解を考える。

$$-\Delta u = f \quad \text{in } S,$$
$$u = g \quad \text{on } \Gamma_D, \quad \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g^* \quad \text{on } \Gamma_R.$$

ここで、$\alpha \geq 0, \Gamma_D \cup \Gamma_R = \partial S$. S は平面上の多角形領域である。有限差分離散で得られたシステムを$Ax = b$ とすると、伝統的な条件数は 2-ノルムで

$$Cond = \frac{\lambda_{max}(A)}{\lambda_{min}(A)}$$

と定義して考えられてきた。しかし、この条件数の定義は離散システムの特異性を正しく反映しないことが知られた。ここで、次の Effective 条件数を考えることにする。

$$Cond\_eff = \frac{||b||}{\lambda_{min}(A)||x||}.$$

その単純化である$Cond_EE$について考察した。境界値問題に対応する固有値問題は

$$\Delta w = \lambda w \quad \text{in } S,$$
$$w = 0 \quad \text{on } \Gamma_D, \quad \frac{\partial w}{\partial n} + \alpha w = 0 \quad \text{on } \Gamma_R.$$

その最小の固有値に対応する固有関数を w_{min} とする。次の仮定をしておく。

$$\sum f_{i,j} w_{i,j}^h \frac{(h_{i-1}+h_i)(k_{j-1}+k_j)}{\partial n} \approx \iint f w_{min} \sim O(1). \qquad \text{(A)}$$

このとき、次の定理が得られた。

定理. 条件(A)のほかに、$\sigma \in (1/2,1) \cup (1,2)$, $p_1 \geq 1$ が成り立つとする。改善した格子に差分スキームを適用して得られた差分解に対して、次のことが成立する。

$$Cond\_EE = O(1) \quad if \ \sigma > 1 + \frac{1}{2p_1},$$

$$Cond\_EE = O\left(\sqrt{|\log h|}\right) \quad if \ \sigma = 1 + \frac{1}{2p_1},$$

$$Cond\_EE = O\left(h^{-1/2} h_{min}^{\sigma-1}\right) \quad if \ \sigma < 1 + \frac{1}{2p_1},$$

これら研究成果は論文［1］に発表した。

(2) 特異性の解をもつ楕円型方程式の境界値問題の高次精度有限差分法に関する研究

以下のような 2 次元空間の円盤における Dirichlet 境界値問題の高次精度数値解法を考える。

$$-\Delta u + q(x,y)u = f\,(x,y) \quad \text{in } \Omega,$$

$$u = g(x,y) \quad \text{on } \Gamma = \partial\Omega.$$

ここで、$q(x,y) \geq 0$. Ω は半径Rの円盤である。真の解は次の条件を満たすとする。

(H1) $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^4(\overline{\Omega} \setminus \Gamma)$, $\partial^4 u/\partial\theta^4$ は$\overline{\Omega}$において有界である。$\exists\sigma \in (0,2), \exists K$, s.t.

$$\sup_{r\in(0,1)} \frac{(R-r)^j \left|(\partial^j u/\partial r^j)(r,\theta)\right|}{(R-r)^\sigma} \leq K$$
$$(1 \leq j \leq 4)$$

(H2) 小さい $\delta > 0$に対して、$\exists C_0 > 0$, s.t.

$$\omega(d) \equiv \max_{dist(P,Q)\leq d} |u(P) - u(Q)| \leq C_0 d^\sigma.$$

ここでは、$P,Q \in \Omega$, $dist(P,\Gamma) \leq \delta$, $dist(Q,\Gamma) \leq \delta$.

$p > 0$ に対して、$\varphi(t) = R - (R-t)^{p+1}/R^p$ を用いて格子の改善を行ううえに Swartztrauber-Sweet 法を適用した。得られた数値スキームは非整合性をもつにもかかわらず、その収束解析で次の収束精度の成果を得た。

定理. 境界値問題の真の解は条件(H1), (H2)をみたすとする。伸長関数によって構成された格子における真の解の値のベクトルを$\boldsymbol{u}$とし、Swartztrauber-Sweet 法による数値解のベクトルを$\boldsymbol{U}$とする。$\mu = (p+1)\sigma < 2$ で、$k^2 \leq M_0 h$ (for some $M_0 > 0$) ならば、$\exists c > 0$, s.t.

$$\max|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{U}| \leq c(K(p)h^\mu + L(p)h^2 + k^2).$$

ここで、$K(p), L(p)$ はp に依存するが、hとkに依存しない定数である。また、$\mu = (p+1)\sigma = 2$ で、$k^2 \leq M_0 h$ ならば、

$$\max|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{U}| \leq c(K(p)h^2|\log h| + L(p)h^2 + k^2).$$

が成立する。

さらに、数値結果により、パラメータpを選ぶことによって収束の最善精度が実現できることを示した。

また、Effective 条件数の有効性を考察した。これらの研究成果は論文［2], [3］に発表した。

(3) 放物型方程式の初期境界値問題の有限差分解の微分の超収束性に関する研究

次の放物型方程式の初期境界値問題を考察した。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(x,y), \quad (x,y) \in S,$$

$$u = g(x,y,t), \quad (x,y) \in \Gamma = \partial S,$$
$$u(x,y,0) = \phi(x,y), \quad (x,y) \in S.$$

空間変数に対しては Shortley-Weller 差分スキームを適用し、時間変数に対しては Crank-Nicolson Method を適用する。メイン結果は次の定理である。

定理. 真の解と半離散数値解をそれぞれ u と u_h と表す。このとき、次の誤差評価が成り立つ。

$$\overline{\|u_h - u\|_0} \leq Ch^2\{\, M_3(\phi) + M_3(u) + \sqrt{\int_0^t M_3^2(u_t)dt} \,\},$$

$$\overline{\|u_h - u\|_1} \leq Ch^2\big(\, M_{3,1}(u) + M_3(\phi)\,\big).$$

ここで、

$$M_m(u_{t^l}) = \max_{k\leq m}\left|\frac{\partial^{k+l}u}{\partial x^i \partial y^{k-i} \partial t^l}\right|,$$

$$M_{m,n}(u) = \max_{k\leq m, l\leq n}\left|\frac{\partial^{k+l}u}{\partial x^i \partial y^{k-i} \partial t^l}\right|.$$

さらに、完全離散数値解をU^nと表すと、次の誤差評価が成り立つ。

$$\overline{\|U^n - u^n\|_0} \leq C\{\, h^2 M_{3,1}(u) + k^2(M(u_{ttt}) + M(f_{tt}))\,\},$$

$$\overline{\|U^n - u^n\|_1} \leq C\{\, h^2 M_{3,1}(u) + k^2(M(u_{ttt}) + M(f_{tt}))\,\}.$$

これら成果は論文［4］に発表した。

(4) 楕円型方程式の境界値問題の解の一意性に関する研究

次の 2 階楕円型方程式の境界値問題を考える。

$$-\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\} + ru = f \quad in\ S,$$

$$u = 0 \quad on\ \Gamma = \partial S.$$

ここで、S は多角形領域で、$p = p(x,y) \geq p_0 > 0$. p, r, f は十分滑らかで、$r = r(x,y)$ の符号は未定でよい。$r > 0$ のとき、境界値問題の解は一意的に存在する。$r < 0$ でももし$|r(x,y)| < \mu_{min}$ ならば、境界値問題の解も存在し、一意的である。ここで、μ_{min} は次の固有値問題の最小固有値である。

$$-\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right\} = \mu w \quad in\ S,$$

$$w = 0 \quad on\ \Gamma = \partial S.$$

2 点境界値問題に対しては、解の一意性と次の条件の同値性は知られている。

$$|g_{ij}| \leq C \quad as \quad h \to 0.$$

ただし、h は有限差分法や有限要素法での最大メッシュサイズである。$A^{-1} = (g_{ij})$ で、A は有限差分法や有限要素法による離散行列である。1 次元の場合は、g_{ij} は容易に計算できるが、2 次元の場合は困難である。本研究では、以下の解の一意性条件を提案した。

S の各格子点をP_i とし、有限要素法で境界値問題を解くとき得られた離散システムを$A_h x_h = b_h$ とする。ここで、未知数のベクトルx_h は境界値問題の近似解$(u_h)_i = u(P_i)$ からなる。次の一意性条件を得た。

(1) $\sqrt{\iint u_h^2} \leq C$

(2) $\frac{1}{\sqrt{n}}||x_h||_2 \leq C$

(3) $\frac{1}{n}\sum_i |u_i^h| \leq C$

(4) $\max_i |u_i^h| \leq C$

以上の成果は論文［5］に発表した。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 5 件）

① Zi-Cai Li, Hung-Tsai Huang, Chien-Sen Huang, Tzon-Tzer Lu and Qing Fang, Effective condition number of finite difference method for Poisson's equation involving boundary singularities, Numer. Funct. Anal. Optimiz. 32 (2011), 659-681. （査読あり）

② Xiao-Yu Zhang and Qing Fang, Effects of stretching functions on non-uniform FDM for Poisson-type equations on a disk with singular solutions, Proceedings of Third International Conference on Boundary Value Problems, Integral Equations and Related Problems, World Scientific Publishing, Singapore, 327--337, 2011. （査読あり）

③ Xiao-Yu Zhang and Qing Fang, Non-uniform FDM for Poisson-type equations on a disk with singular solutions, Numer. Funct. Anal. Optimiz. 31 (2010), 634-651. （査読あり）

④ Zi-Cai Li, Qing Fang and Song Wang, Superconvergence of solution derivatives for the Shortley-Weller difference approximation for parabolic problems, Numer. Funct. Anal. Optimiz. 30 (2009), 1360-1380. （査読あり）

⑤ Zi-Cai Li, Qing Fang, Hung-Tsai Huang and Yimin Wei, On solution uniqueness of elliptic boundary value problems, J. Comput. Appl. Math. 233 (2009), 293-307. （査読あり）

〔学会発表〕（計 8 件）

① Xiao-Yu Zhang and Qing Fang, Superconvergence of Swartztrauber-Sweet Method for Parabolic Problems on a Disk with Singular Solutions, 7th International Congress on Industrial and Applied Mathematics (ICIAM2011), Vancouver, Canada, July 18-22, 2011.

② 張暁宇・方青、On a New FDM for Nonlinear Two-point Boundary Value Problems, 日本数学会秋期総合分会、２０１０年９月２２日～２５日、名古屋大学

③ Xiao-Yu Zhang and Qing Fang, On the Higher Order Numerical Method for Nonlinear Two-point Boundary Value Problems, Mathematical Aspects of Crystal Growth, July 26-30, 2010, Hokkaido University.

④ Qing Fang, Effect of Stretching Functions on Numerical Solutions of Boundary Value Problems, March 4, 2010, Lecture on Numerical Analysis, National Sun Yat-sen University, Kaohsiung.

⑤ Qing Fang, Effect of Stretching Functions on Numerical Solutions of Boundary Value Problems, March 24, 2010, Lecture on Applied Mathematics,

Tunghai University, Taichung.

⑥ 方青、特異性の解を持つ偏微分方程式の数値解析について、早稲田大学・数理解析セミナー、２００９年１１月２１日

⑦ Xiao-Yu Zhang and Qing Fang, A High Order Efficient Numerical Algorithm for Nonlinear Two-Point Boundary Value Problems, The Fifth International Conference on Information, Kyoto University Clock Tower Centennial Hall, Kyoto, November 6-9, 2009.

⑧ 張暁宇・方青、A sixth order numerical method for two-point boundary value problems, 日本応用数理学会２００９年度年会、２００９年９月２８日～３０日、大阪大学

６．研究組織

(1)研究代表者

方　青（Qing Fang）

山形大学・理学部・教授

研究者番号：10243544

(2)研究分担者

河村　新蔵（SHINZO KAWAMURA）

山形大学・理学部・教授

研究者番号：50007176

(3)連携研究者

澤田　秀樹（HIDEKI SAWADA）

山形大学・基盤教育院・教授

研究者番号：30095856

西村　拓士（TAKUZI NISHIMURA）

山形大学・理学部・准教授

研究者番号：90333947