様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成　24 年　5 月　21 日現在

機関番号：１２１０２
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2009　～2011
課題番号：２１５４０１０９
研究課題名（和文）　一般化２階微分作用素のスペクトル理論再論とその確率論への応用

研究課題名（英文）New approach to spectral theory of generalized second-order differential operators and its applications to probability theory

研究代表者
笠原　勇二（KASAHARA YUJI）
筑波大学・数理物質系・教授
研究者番号：60108975

研究成果の概要（和文）：　１次元拡散過程は一般化された２階の微分作用素で記述することが出来ることはよく知られている。よって、１次元拡散過程に付随する様々な確率法則を研究することは２階の微分作用素のスペクトル関数の問題に帰着されることが多い。本研究では、Krein-Kotani の理論の応用として、スペクトル関数の漸近挙動について必要十分条件の形で求めた。またそれに関連して、拡散過程の最大値の漸近挙動についても成果を得た。

研究成果の概要（英文）：It is well known that a linear diffusion is described by a generalized second-order differential operator. Therefore, the study of various quantities of linear diffusions is reduced to problems on the spectral functions. In the present study we obtained a necessary and sufficient condition on the asymptotic behavior of the spectral function. Furthermore, we also obtained some related results on the maximum process of the diffusion.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2009 年度	900,000	270,000	1,170,000
2010 年度	900,000	270,000	1,170,000
2011 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総　計	2,800,000	840,000	3,640,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：　数学・数学一般（含確率論・統計数学）
キーワード：　確率論

１．研究開始当初の背景

１次元拡散過程の一般論は W.Feller, Hille-Yosida 等による美しい理論があり、Ito-McKean のモノグラフによって既に古典的な分野となっている。しかし、古典的と言っても、過去のものという意味ではなく、研究者の間で常識として使われる基礎知識になっているという意味である。

欧米では Ito-McKean の本を精読した人々により継続的かつ精力的な研究があり、Williams 等の一流の確率論研究者達によりエクスカーション理論を用いた見本関数の微細構造の詳しい研究など続けられ、重要な知見が得られている。また近年、M.Yor 達のファイナンス理論への応用などでも注目を浴びている。さらに、Sinai によるランダム媒質中のランダム・ウォークの問題が Brox

達により、ランダムなドリフトをもつ一次元拡散過程の話にほぼ帰着出来ることが分かってきており、古典的な拡散過程の理論や手法が Sinai モデルの研究に大いに役立つことが知られてきている。

１次元拡散過程の記述には２階微分作用素が標準的に使われるが、この作用素は、弦の振動の記述をはじめ、多くの場面で現れる。この作用素に関するスペクトル理論は Weyl-Stone-Titchmarsh-Kodaira の展開定理が古典的であるが、ここでは差分作用素も含むように一般化された２階微分作用素を考える。この一般化は逆問題を考える上で本質的であることが知られていて、特に左端が反射壁であるとき、作用素とスペクトル関数の間の完全な１対１対応が Krein によって与えられている。これを Krein の対応という。

この対応は近年、小谷眞一氏により大きく発展し、左端が（Weyl の分類で）極限円型の境界の場合にまで拡張された。そのきっかけになったのは、研究代表者と渡辺信三氏による、ある種の加法過程をブラウン運動の局所時間を用いて表現する手法である。小谷氏はスペクトル関数を計算する手順として、ある Herglotz 関数を計算すればよいことを示したが、これは研究代表者達が提示した Herglotz 関数の確率論的表現がベースになっている。

従って、小谷の理論は加法過程や拡散過程と結びつき、双方向への応用が可能になる。本研究ではその関係式を明確にし、それを例えばスペクトル関数の漸近オーダーを求める問題に応用し、またそれを拡散過程の問題に応用出来るものと予想された。

２．研究の目的

ブラウン運動の局所時間をあるラドン測度 m(dx)で積分して得られる汎関数は、原点の局所時間で計ってみると加法過程であり、その exponent はもとの m(dx) の dual をスピード測度とするフェラー生成作用素のスペクトル関数のスチルチェス変換となる。M.G.Krein のスペクトル理論を援用すれば、これらの対応はすべて１対１かつ上への写像であり、しかも適当な位相のもとで両連続性が成り立つ。この事実は近年では専門家の間ではよく知られており、多くの応用がなされている。

近年、渡辺信三氏との共同研究の中で気が付いた事実であるが、上記の対応がより広いクラスまで拡張可能であることである。すなわち、Krein の理論はスペクトル関数と一般化された２階微分作用素（フェラー生成作用素）との１対１かつ上への写像であることを主張しているが、これは半直線上の理論であり、拡散過程の言葉で言えば、左端が正則で、そこを反射壁とした場合である。また、上述の加法過程で言えば、単調非減少な加法過程の場合に限っていることに対応している。ところが、この対応は、じつは、「ある条件」のもとに、全直線の場合に拡張できるというのが今回の主張である。「ある条件」とは後日、阪大の小谷眞一氏によって、実は Weyl の分類でいう「極限円」と一致することが指摘され、同氏は Krein の対応をこのクラスまで明確な形で拡張し、Herglotz 関数などとの関係を明らかにした。

研究代表者は渡辺信三氏との共同研究の中で、これがまた「完全単調なレヴィ測度をもつ加法過程」とも対応していることを指摘している。このことは、事実として興味あるというだけでなく、スペクトル関数を調べるのに、加法過程の知識・技法が使えるというメリットを示唆する。

上記の「拡張」はまだ十分に整理されているとはいえないので、今回の研究でさらに整理し、応用を図るのを目的とした。

例えば、応募者は（２０年以上昔であるが）、Krein 理論におけるスペクトル関数とスピード測度の漸近対応関係について論文を書いたことがある。そこでは指数が１未満の場合に限られていて、１以上については未解決であったが、今回の「拡張」を用いて解決を試みた。

具体的には、上記のとおり、「拡張」はまだ十分に整理されているとはいえないので、
（１）この拡張された対応を、きちんと整理し、
（２）　スペクトル関数の漸近性質の問題で未解決のままになっているケースを解決し
（３）　拡散過程の汎関数の極限定理への応用を考える。

３．研究の方法

研究代表者と分担者の他、この分野で活躍している、小谷眞一氏、渡辺信三氏、矢野裕子氏、矢野孝次氏らと積極的な共同研究や議論を行った。また、大学院生にも具体例の計算などで協力を依頼した。

具体的な手法や道具としては、小谷の方法による解析的な方法による Herglotz 関数と弦との一意対応と、代表者が以前指摘した、scaling property を用いて前挙動を解析する手法があげられる。表面には出ていないが、背景には古典的な極限定理の一般論があり、これらが見通しのよい証明方法のベースになった。

また、拡散過程の構成法として、ブラウン運動の時間変更による方法を用いた。

４．研究成果

(1)小谷眞一氏は、２階の微分作用素と、それに対応する Herglots 関数の１対１対応と、その対応についてある種の両連続性を証明したが、本研究ではその対応を、より広いクラス（２次の項が残る Herglots 関数）に拡張するとともに、その Herglots 関数を exponent にもつような加法過程を与えた。このことにより、１次元拡散過程と加法過程の間の密接な関係が明らかにされ、解析学の問題に確率論的な解釈が容易になり、双方向の応用が期待出来るようになった。

（２）スペクトル関数の漸近挙動と、微分作用素の漸近挙動との間の完全な対応関係を正則変動関数の範囲で証明した。確率論的に言えば、零再帰的拡散過程の遷移確率の漸近挙動について知られていた対応関係を、正再帰的な場合や一時的な場合にまで拡張出来たことになる。

（３）　上記（２）では transient な１次元拡散過程について推移確率の漸近挙動を speed 測度の言葉で記述することに成功したが、これにさらに dual の概念を活用することにより、positive recurrent な場合についても同様な成果を得た。すなわち、推移確率密度は時間無限大のとき定数に収束するが、その収束オーダーは speed 速度の遠方での減少オーダーと完全な対応関係があることを証明した。

（４）ブラウン運動については片側滞在時間が逆正弦法則に従うことは有名な古典的結果であり、多くの研究者が興味をもってきた話題である。とくに渡辺信三氏により、一般的な１次元拡散過程について極限定理が証明されている。これとは別タイプで、ランダムな媒質中をランダムに動く粒子のモデルとして Brox の拡散過程モデルが有名であるが、この Brox の確率過程について、片側滞在時間に関する極限定理を証明した。本研究におけるスペクトル理論そのものの応用ではないが、そこで使われたアイデアの応用である。

（５）positive recirrent な１次元拡散過程の最大値の漸近挙動についても結果を得た。これについては、可能な極限分布は iid 確率変数列の最大値の場合と同じであることは Berman による古典的な結果であるが、Berman は抽象的な条件しか与えていなかった。本研究では拡散過程の場合にその牽引域を具体的に述べることが出来た。

（６）上記の（５）では positive recirrent な１次元拡散過程を対象としたが、null recurrent のの最大値の漸近挙動についても結果を得た。これについては、可能な極限分布は iid 確率変数列の最大値の場合と同じであることは Berman による古典的な結果であるが、Berman は抽象的な条件しか与えていなかった。本研究では拡散過程の場合にその牽引域を具体的に述べることが出来た。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　10 件）

① Yuji Kasahara and Genki Tahara: Limiting distribution of the maximum of a null recurrent diffusion process, Kodai Mathematical Journal, to appear （査読有）

② Kasahara, Yuji and Kumanda, Kosuke: On the maximum of a one-dimensional diffusion, Kobe J. Math., to appear （査読有）

③笠原勇二、田原元気: 拡散過程の最大値に関する極限定理、統計数理研究所共同研究リポート２７５（2012.2), 115-119. （査読無）

④Kasahara, Yuji and Watanabe, Shinzo: Asymptotic behavior of spectral measures of Krein's and Kotani's strings. Kyoto J. Math. 50 (2010), no. 3, 623–644. （査読有）

⑤ Kusuoka, Shigeo and Liang, Song: A classical mechanical model of Brownian motion with plural particles. Rev. Math. Phys. 22 (2010), no. 7, 733–838. （査読有）

⑥笠原勇二: Brownian functionals attracted to stable Levy processes
統計数理研究所共同研究リポート２４７ (2010.2), 22-26. （査読無）

⑦Kasahara, Yuji and Watanabe, Shinzo: Remarks on Krein-Kotani's correspondence between strings and Herglotz functions. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 85 (2009), no. 3, 22–26. （査読有）

⑧Kasahara, Yuji and Watanabe, Shinzo: Occupation time theorems for one-dimensional random walks and

diffusion processes in random environments. Stochastic Process. Appl. 119 (2009), no. 2, 347–372. （査読有）

⑨ Liang, Song; Tahara, Yoshihiro: A formula to compute implied volatility, with error estimate. Interdiscip. Inform. Sci. 15 (2009), no. 2, 267–272. （査読有）

⑩笠原勇二、渡辺信三: Krein-Kotani の対応のレヴィ過程への応用
統計数理研究所共同研究リポート２２５ (2009.2), 1-6. （査読無）

〔学会発表〕（計　4 件）
①笠原勇二:拡散過程の最大値に関する極限定理, 統計数理研究所共同研究集会 2011.11.12 統計数理研究所

②笠原勇二: 1 次元拡散過程の最大値について, 共同研究集会「無限分解可能過程に関連する諸問題」2010.10.23 統計数理研究所

③笠原勇二・渡辺　信三: 1 次元拡散過程の推移確率の漸近挙動, 日本数学会　秋季総合分科会 2010.9.22 名古屋大学

④笠原勇二:Brownian functionals attracted to stable L'evy processes,
統計数理研究所共同研究集会 2009.11.19 統計数理研究所

６．研究組織
(1)研究代表者
笠原　勇二（KASAHARA YUJI）
筑波大学・数理物質系・教授
研究者番号：60108975

(2)研究分担者
梁　松（LIANG SONG）
筑波大学・数理物質系・准教授
研究者番号：60324399