

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 23 年 4 月 27 日現在

機関番号：12301

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2011

課題番号：21540111

研究課題名（和文）再生核の理論のチホノフ正則化法への応用

研究課題名（英文） Applications of the theory of reproducing kernels to the Tikhonov regularization

研究代表者

齋藤 三郎 (SAITOH SABUROU)

群馬大学・名誉教授

研究者番号：10110397

研究成果の概要（和文）：

離散化微分方程式という考え方を得て、いろいろ具体的な場合に解を表現した。入力を有限値の有限個データとしたときに、自然な他の入力情報を予測できるという考えを得た。一般の分数関数を作用素を用いて一般的に定義し、表現すること、および数値解析的に求めるアルゴリズムを提案した。convolution で表される積分方程式と、Toeplitz と Hankel 核を持つ積分方程式の近似解法を得た。新しい定義を含む convolution と新しい型の不等式を導いた。研究著書（英文）を 314 ページに纏め、内容を充実させた。

研究成果の概要（英文）：

We obtained the concept of discrete differential equations and derived various concrete results. For a finite number of input data, we obtain a new concept that we can give natural input data as other input data. We introduced the new definition of general fractional functions and their representations, and methods how to calculate them practically, by computers. We gave the approximate solutions of integral equations with convolution type kernels and with Toeplitz and Hankel kernels. New convolutions and related convolution norm inequalities were derived. We wrote a new research book manuscript with 314 pages.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,600,000	480,000	2,080,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
2011年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：再生核，チホノフ正則化法，逆問題，アルゴリズム，数値解析，近似解
積分方程式、微分方程式

1. 研究開始当初の背景

再生核の理論の広範な応用、特に数値解析の観点から、計算機画面上に解を実現させるような研究を行なう。

齋藤は、スタンフォード大学流の具体的な再生核の理論を始めとして一般論や応用に関する再生核の理論の広い分野を研究テーマとし、ここ40年来、一貫して研究を行ってきた。その関連論文は150編を越え、英文研究著書も2冊出版している。約7年前、熱伝導における逆問題への数値解析的なアプローチとして、チホノフの正則化法に再生核の理論を適用する考えを得た。

そのようなとき、機械工学の松浦氏が共同研究に加わり、具体的な公式の数値計算に成功し、更に計算機画面上に結果を表現することにも成功し、これらの歴史的な成功に刺激されて、いろいろな逆問題からの理論の精密化を図るとともに、現実的な計算アルゴリズムの構築を目指して共同研究することとなった。

そして約7年前、我々は歴史的に難問とされてきた熱伝導における逆問題について、この方法を適用し、新しい陽表現公式を確立した。さらに我々は、得られた逆公式を用いて、任意時刻に任意温度分布を実現する初期温度分布を算定するアルゴリズムを開発し、コンピュータによる数値実験を行い、この方法とアルゴリズムの妥当性を確認することに成功した。その後、逆問題における難問として有名な実逆ラプラス変換の数値解析的な解法も 藤原宏志氏と澤野嘉宏氏の協力を得て成功し、そのソフトの原理、装置を京都大学と群馬大学の共願で特許の申請を19年夏申請し、2011年夏JSTの補助により国際特許の申請を済ませ、工学などへの応用の

研究を進めている。

2. 研究の目的

ここで、この成功を数学的な原理に基づいて触れると、関数の解析性を計算機で捕らえることに成功したと言えるもので、さらに、数学の解析の結果を計算機に載せるための新しい離散化法を与えるもので、我々の開発した方法論には汎用性・普遍性があり、一般のヒルベルト空間上の有界作用素方程式の新しい解法を与え、偏微分方程式や逆問題等に広汎に適用できるものである。

そこで、我々はこの方法・手法を、非適切性などで従来解くことが困難とされてきた他の逆問題や変係数の常微分方程式、偏微分方程式にも適用して解の表示を導出したい。そして具体的に数値計算が可能なアルゴリズムを構築し、数値計算で具体的な解を得てそれをコンピュータ画面上に表示することによって我々の方法の新規性、汎用性、有効性を明らかにしたい。

すでに我々の方法を適用した例としては、1) 過剰境界・初期条件の下での非斉次常微分方程式の解の近似構成法、2) 熱伝導における逆問題、3) 非斉次波動方程式の逆問題、4) ラプラス変換の実逆変換の計算法、5) 複雑な境界条件を満たすポアソン方程式の近似解の構成などがある。どの問題も従来難問とされているが、特に、ラプラス変換の実逆問題は尚難しい問題であるが、機械工学や石油工学、金融工学、地球物理など広い分野に具体的な応用があるので、重点的に取り組んで行きたい。この問題も本質は計算機で関数の解析性を捕らえられるかの問題や解析接続を計算機で具体的に出来るかの興味深い、深い問題に関係している。

3. 研究の方法

良い計算機とその周辺機器と関係研究者との研究交流が研究計画、方法の本質である。本方法の適用範囲の拡大とアルゴリズムの開発、成果の発表チホノフの正則化と再生核の理論を結びつけた我々の理論や、解空間をペーリー・ウィーナー空間に限定した場合には、従来、非適切性等により解くのは不可能と考えられてきた様々な逆問題への応用が可能であることが判明している。既に幾つかの典型的な偏微分方程式や常微分方程式への適用は完成しているが、さらに範囲を広げ、変係数の常微分方程式や、より難しく現実に応用できる逆問題を扱う。またそれぞれの逆公式に対し、現実的な時間で計算可能で誤差累積の少ないアルゴリズムを開発する。

部分境界値を与えた場合のディリクレ問題の調和関数の再構成アルゴリズムの開発をした。

4. 研究成果

研究課題の大きな展開として再生核とチホノフ正則化法の基本的な応用として、微分方程式に対して、離散化微分方程式という考え方を得た。これは実際に観測するデータは有限個であるという認識を如何に数学的に上手く実現するかという問題意識から考えたものである。再生核の理論がこのような要求に自然に応えるべく驚くほど合っていることを発見した。

具体的な成果としては、難しい問題として有名な熱伝導の逆問題で、時間と空間の有限個の観測情報から、初期温度分布を求めるアルゴリズムを提案して、論文を書き、既に出版している。ラプラス変換の新しい実逆変換の公式、変数係数の常微分方程式の解法を、境界値条件を含めて、一般的な状況での解法

を得て、それぞれ論文にまとめ、さらに、全空間の定係数の一般の偏微分方程式の離散化方程式の解法についても論文に纏め論文として発表している。

新しい、発想、方法として、実際として使える情報が有限個であるという観点から、順問題や逆問題における解を直接有限個で構成する数学を始めて数編の論文を発表している。

最終年度には 1) 分数関数を用いて一般的に定義し、表現すること、および数値解析的に求めるアルゴリズムの提案、これは分数関数の性質を導くことと、分数関数を計算機で具体的に求める有効なアルゴリズムを提案していると考え。これは沢山の点で分母の関数がゼロに近い値をとる場合を想定して、考えた。チホノフ正則化法と再生核の理論を本質的に用いている。

2) convolution で表される積分方程式の再生核の理論を用いた解法、これは最良近似解の表現を求めようとして始めたが、思わぬ深い現象が起きていて、普通の解と一般化解が一致していて一般的に議論したため、扱いは相当に複雑で、深くなっている。

3) 数理工学で応用の多い、Toeplitz と Hankel 核を持つ積分方程式の解法、この際は、フーリエ積分をとると非線形作用になるので、さらに一段と複雑で、難しい問題が生じたが、数学的には、一応解決できた。そして、それらの研究中に偶然に発見した

4) 新しい定義を含む convolution と新しい型の不等式を導いた。チホノフ正則化法を避けて、できるだけ簡単なアルゴリズムを考えようとして、それらの研究中に基本的で、一般的な原理と具体的な成果が得られつつある：出力観測情報が、有限個の点で有限の値をとる、線形システムにおいてそのある自然な意味で最良な逆を求める原理で、ヒルベルト空

間の枠内でそれを定式化すると、再生核の理論を用いると驚くほど簡単に、驚くべき簡潔な形で最良逆が定式化できることが分かった。従来挑戦してきたラプラス変換などでも驚くべき結果が得られている。

研究計画の骨格である研究著書出版、仮題：The theory of reproducing kernels - 60 years since N. Aronszajn (英文)を 314 ページに纏め、共著者澤野嘉宏に 12 月 8 日に送って、内容を相当充実させることができた。また、不備の点など、澤野氏と直接京都大学で詳しく検討できた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 8 件)

- ① L.P. Castro, Saitoh, S., Natural outputs and global inputs of linear systems with a finite number of input data. *Applicable Analysis*, 査読有, 91(2012), 225-236.
- ② L.P. Castro, Saitoh, S., Y. Sawano, A.M. Simoes, General Inhomogeneous Discrete Linear Partial Differential Equations with Constant Coefficients on the Whole Spaces, 査読有, *Complex. Anal. Oper. Theory* 6(2012), 307-324.
- ③ Butzer, P. L.; Ferreira, P. J. S. G.; Higgins, J. R.; Saitoh, S.; Schmeisser, G.; Stens, R.L. Interpolation and sampling: E. T. Whittaker, K. Ogura and their followers. 査読有 *J. Fourier Anal. Appl.* 17 (2011), no. 2, 320-354.
- ④ Takahasi, Sin-Ei; Rassias, John M.; Saitoh, S.; Takahashi, Yasuji, Refined generalizations of the triangle inequality on Banach spaces. 査読有 *Math. Inequal. Appl.* 13 (2010), no. 4, 733-741.
- ⑤ Castro, L. P.; Chen, Q.; Saitoh, S. . Source inversion of heat conduction from a finite number of observation data. 査読有 *Appl. Anal.* 89 (2010), no. 6, 801-813.

⑥ Sawano, Yoshihiro; Yamada, Masato; Saitoh, S. Singular integral inequalities and natural regularizations. 査読有 *Math. Inequal. Appl.* 13(2010), no. 2, 289-303.

⑦ Uchida, Keitaroh; Kumahara, Keisaku; Saitoh, S. Normal solutions of linear ordinary differential equations of the second order. 査読有 *Int. J. Appl. Math.* 22 (2009), no. 6, 981-996.

⑧ Yamada, Masato; Saitoh, S. Numerical solutions of two non-linear simultaneous equations. 査読有 *Appl. Anal.* 88 (2009), no. 2, 151-160.

[学会発表] (計 4 件)

- ① Saitoh, S., Applications of the theory of reproducing kernels to convolutions and integral equations, IWOTA, Sevilla 2011, 2011.7.8. Universidad de Sevilla (スペイン)
- ② Saitoh, S., Fundamental error estimates inequalities for the Tikhonov regularization using reproducing kernels, 2010. Sep. 22, Hajduszoboszlo (ハンガリー)
- ③ Saitoh, S. Constructions of the approximate solutions of singular integral equations by using the Tikhonov regularization and the theory of reproducing kernels, ICNPAA 2010 World Congress: 8th International Conference on Mathematical Problems in Engineering, Aerospace and Sciences, 2010. July. 1, Sao Jose (ブラジル)
- ④ Saitoh, S., Explicit and direct representations of the solutions of non-linear simultaneous equations, ISAAC, 2009/7/16 Imperial College London (イギリス)

[図書] (計 4 件)

- ① Saitoh, S. Theory of reproducing kernels: applications to approximate

solutions of bounded linear operator equations on Hilbert spaces 査読有 Selected papers on analysis and differential equations, 107-134, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 230, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2010).

②M. Yamada, Saitoh, S. . Explicit and direct representations of the solutions of nonlinear simultaneous equations. 査読有 Progress in analysis and its applications, 372-378, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, (2010).

③Yamada, M.; Saitoh, S. . Practical inversion formulas for linear physical systems. 査読有 Further progress in analysis, 584-589, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, (2009).

④Fjiwara, H.; Matsuura, T.; Saitoh, S.; Sawano, Y. Numerical real inversion of the Laplace transform by using a high-accuracy numerical method. 査読有 Further progress in analysis, 574-583, World Sci. Publ., Hackensack. (2009)

[産業財産権]

○出願状況 (計 3 件)

①名称: 「逆ラプラス変換プログラム、逆ラプラス変換のためのテーブル作成プログラム、逆ラプラス変換の数値解算出プログラム、および逆ラプラス変換装置」

発明者: 齋藤三郎, 松浦勉 (群馬大学), 藤原宏志 (京都大学)

権利者: 国立大学法人群馬大学, 国立大学法人京都大学
種類: 特許
番号: 0879236.8

出願年月日: 2010.8.12
国内外の別: 国外 (EU)

②名称: 「逆ラプラス変換プログラム、逆ラプラス変換のためのテーブル作成プログラム、逆ラプラス変換の数値解算出プログラム、および逆ラプラス変換装置」

発明者: 齋藤三郎, 松浦勉 (群馬大学), 藤原宏志 (京都大学)

権利者: 国立大学法人群馬大学, 国立大学法人京都大学
種類: 特許
番号: 12/673718
出願年月日: 2010.2.16
国内外の別: 国外 (USA)

③名称: 「逆ラプラス変換プログラム、逆ラプラス変換のためのテーブル作成プログラム、逆ラプラス変換の数値解算出プログラム、および逆ラプラス変換装置」

発明者: 齋藤三郎, 松浦勉 (群馬大学), 藤原宏志 (京都大学)

権利者: 国立大学法人群馬大学, 国立大学法人京都大学
種類: 特許
番号: 2696331
出願年月日: 2010.2.12
国内外の別: 国外 (CANADA)

○取得状況 (計 0 件)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

齋藤 三郎 (SAITOH SABUROU)
群馬大学・名誉教授
研究者番号: 10110397

(2) 研究分担者

松浦 勉 (MATSUURA TSUTOMU)
群馬大学・大学院工学研究科・准教授
研究者番号: 80181692

(3) 研究分担者

渡辺 秀司 (WATANABE SYUJI)
群馬大学・大学院工学研究科・教授
研究者番号: 90222405