

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 21 日現在

機関番号：13201

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009 ～ 2011

課題番号：21540122

研究課題名（和文） 移動境界を有する流れ問題の高機能有限要素法とその応用に関する研究

研究課題名（英文） High accuracy finite element method for flow problem with moving boundary and relative topics

研究代表者

大森克史（OHMORI KATSUSHI）

富山大学・人間発達科学部・教授

研究者番号：20110231

研究成果の概要（和文）：

本研究では非圧縮性の 2 流体問題のフラックス・フリー有限要素法を考察し、その質量保存性や近似解の誤差評価や収束性などの数学的妥当性を、粘性と密度が不連続である一般化ストークス問題の界面問題で示した。分担者・奥村は 2 次元自由界面流れ問題に対する高精度 Hermite 要素に基づく Semi-Lagrange Galerkin 特性法を開発し、さらに CSF 法を応用した表面張力効果を考察した。

分担者・村川は 3 重結節点を含む移動境界問題について、移動境界の情報を陰的に含む弱形式を与えた。さらにその移動境界を容易に捉えることの出来る数値解法を提案し解析した。

分担者・山口は、全空間の Navier-Stokes 方程式に処罰法を適用して得られる方程式の解がパラメータ極限として Navier-Stokes 方程式の解に十分に近づくということを解析半群の理論を使って示すことにより、初期値問題に対する処罰法の数学的正当化を示した。

研究成果の概要（英文）：

In this research we considered the flux-free finite element method for incompressible two-fluid flows and we gave the mathematical consideration for the mass conservation, error estimates and the convergence of the approximate solution of the flux-free finite element method for the generalized Stokes interface problem in the case of discontinuous viscosity and density.

Okumura considered the free-interface flow problem using the SLG characteristic finite element method with the Hermite element and the surface tension effect by the CSF method.

Murakawa treated a moving boundary problem with triple-junction points. He provided a weak formulation of the problem which implicitly involves the information of the moving boundaries. Moreover, he proposed and analyzed an efficient numerical method for capturing the moving boundaries. Yamaguchi had by analytic semigroup theory that mind solution of the Cauchy problem of penalized Navier-Stokes equations converges to that of original problem when penalty parameter tends to zero.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,800,000	540,000	2,340,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
2011年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：自由界面問題、有限要素法、フラックス・フリー有限要素法、Semi-Lagrange Galerkin 特性関数法、表面張力、反応拡散近似、移動境界問題

1. 研究開始当初の背景

移動境界問題は自然界や工学プロセスにしばしば現れる重要な問題であり、自由表面や自由界面を有する2流体問題をはじめ、氷の融解や凝固に代表される物質の相変化を伴うステファン問題や、多孔質媒体における流れ現象などの、現象を含んでいる。

移動境界値問題の数値解析の研究は、我が国ではエンジニアを中心におこなわれているが計算スキームの開発とインプリメントだけにとどまっているものが多く、計算スキームの誤差評価、収束性等の数学解析まで論じた研究はそれほど多くないのが実情である。

2. 研究の目的

本研究では実用上重要であるにもかかわらず、流体现象の複雑系である移動境界問題を対象に、高機能有限要素スキーム等の数値的技法開発と、その数学解析による手法の妥当性を明らかにする。

本研究では流体现象の複雑系である移動境界問題を取り上げ、これらに対する新たな高精度、高安定性、高速性および質量保存性等の数理モデルの持つ構造を有する高機能有限要素スキームの開発とその数学解析およびこれに関する研究を行う。具体的には高密度比、高粘性比の2流体問題に対して適用可能な新たな有限要素スキームを開発しその数学的性質を明らかにする。新しいスキームの開発にあたっては(1)表面張力を効力した数理モデルの導入(2)移流方程式に対する新しいスキームの導入(Semi-Lagrange Galerkin法)等の観点に留意して行う。さらに本手法の実用問題(河川氾濫現象および鋳造プロセス)への応用も考察する。また特殊な移動境界問題として多孔質媒体における地下水流れと表面流の総合作用をあらわすDarcy-Stokes問題という複雑系モデルに対して、新たな有限要素スキームを開発しその数理解析を行う。一方移動境界問題の応用解析的アプローチとして、2流体問題に表Navier-Stokes方程式と移流方程式の非線形カップリング問題の適切性と解の正則性等について、半群的理論および線形摂動理論を用いて明らかにする。

3. 研究の方法

研究の方法は、研究代表者と研究分担者の奥村は、本研究のメインテーマである自由界面問題等の移動境界問題の高機能有限要素法の研究が共通であるので、互いに研究連絡をしながら研究を行った。研究分担者の村川は移動境界問題の数値解析を中心に研究を行った。研究分担者の山口は応用解析の立場から研究を行った。研究代表者以下、研究分担者が富山大学の教員であることの特徴を生かし、連絡を密に取りながら研究を実施した。なお、研究分担者の村川は、最終年度の平成23年度は九州大学へ異動しことを付記する。

4. 研究成果

フラックス・フリー有限要素法は界面での速度フラックスが0であるという制約条件をラグランジェ未定乗数法の枠組みの新しい混合型変分定式化に基づく有限要素法である。本研究では質量保存性や近似解の誤差評価や収束性などの数学的妥当性を、粘性と密度が不連続である一般化ストークス問題の界面問題を例に示した。

2次元自由界面流れ問題に対する高精度なHermite要素に基づく、特性有限要素法を開発した。具体的には2次元自由界面問題を構成する移流方程式とNavier-Stokes方程式に対してSLG(semi-Lagrange Galerkin)法を適用した。混合型有限要素近似として流速場に移流計算と同様のHermite型の完全3次三角形要素、圧力場には三角形1次要素を適用した。これにより非圧縮条件の過拘束条件に起因する圧力の数値不安定性を回避した。

また、表面張力効果を考慮した2次元自由界面流れ問題の有限要素解析について、従来のCSF法を応用した新しい方法を考察した。

一方、2流体問題の有限要素解析をより効率良く行うためにパリ第6大学のPironneau教授とHecht教授らが中心となって開発した汎用有限要素解析ツールFreeFem++によるプログラムを開発した。従来の2流体問題の有限要素解析プログラムは、たとえばP1b+P1の有限要素モデルに対して約1000行のFortranプログラムであり、有限要素モデルが異なればそれに応じてプログラムを変更する必要がある。ところがFreeFem++では約40

行でプログラムが可能で、開発コストがかなり節約出来た。これは今後の数値解析にインパクトを与えるイノベーションを提供することが明らかとなった。数値実験はレベルセット法を用いた非圧縮粘性2流体のバブル上昇問題を解析した。今後の課題としては、たとえばNavier-Stokes方程式の移流項の取り扱いが現在の1次の特性有限要素法が標準で用いられているが、2次の特性有限要素法に精度を上げる等の改良が必要であり、また、さらにFreeFem++の新しい応用を考える必要があると思われる。

なお、GPGPUの大規模数値計算への応用の可能性を探るため、2次元ナビエ・ストークス問題の差分スキームによる標準的なプログラムを使ってベンチマークテストを行った。その結果、GPGPUで並列化を行ったときが従来の約2倍のスピードが得られた。

また、本研究の応用として海洋波動の数値モデルとして非線形保存型の浅水長波方程式に対して有限要素法に基づく計算力学手法を採用することにより、深海波の分散性の性質と極浅海域での非線形性を同時に考察し、海底地形データをもとに富山湾の波の大規模コンピュータシミュレーションを行った。その結果、富山湾特有の寄り回りの基本的な発生メカニズムは、富山湾固有の複雑な海底谷と、海岸から1 kmから5 kmの沿岸域内における急激な海底地形により発生する大きな「屈折」を伴った浅水変形が波エネルギーを局所的に集中させることで波高が高くなる現象であることを示した。

分担者・村川は主に、3重結節点を含む移動境界問題の解析と数値解析について研究した。

移動境界問題において、3つ(以上)の移動境界が1点で交われば、その点は三(多)重結節点となるが、多重結節点を含む問題の解析は困難である。分担者・村川は二宮広和氏(明治大学)と共に、3重結節点を含むある移動境界問題を取り扱い、その問題の弱形式を与えた。

更に、この弱形式では移動境界の情報は陽には含まれておらず、領域全体で問題の解を求めた後に移動境界の情報が得られるため、移動境界問題の解析を容易にするものでもある。3重結節点を含む移動境界問題の解析は極めて難しく、移動境界の情報を陰的に含む形式で表現したのは本研究が世界初である。この研究から3重結節点を含む移動境界問題の解析が今後急速に発展することが見込まれる。

分担者・村川は更に、この問題を含む一般の交差拡散系に対する、汎用的で、実装が簡単な、効率的な数値解法を提案し、その解析を行った。交差拡散系の数値解析の歴史は浅

く、限定された問題に対するものしかなく、文献も数えきれないほどしかない。特に、上記の移動境界問題の弱形式である交差拡散系に適用できる数値解法の研究はこれまでになかった。更に、既存の数値解法は実装が煩雑で計算コストも高いものである。これらの問題を解決するために、一般の交差拡散系を近似する近似解法に着目し、その離散化を行うことで、汎用的で簡便な、計算コストが安い線形数値解法を得た。多くの数値実験を行ったところ、精度も十分なものである。その数値解法の解析を行い、安定性と収束性を示した。この研究により、これまで煩雑であった交差拡散系に対する数値計算が、容易なものとなった。また、この数値解法は上記の移動境界問題の数値解の求解にも適したものであり、3重結節点を含む移動境界を容易に捉えることができる。この研究は、非線形拡散問題の解析の発展に寄与するものと思われる。

関連の研究として、水銀等の導電性非圧縮粘性流体の運動を支配する3次元有界領域の磁気流体方程式形の初期値・境界値問題について、第1Betti数が0の場合、粘性係数が大きくかつ伝導度が小さいとき、3乗可積分関数のクラスに属する定常流が一意に存在し、さらに定常流が微小な初期摂動に対し、初期摂動が3乗可積分関数空間のノルムの意味で小さいときに定常解は指数関数的に安定であることを明らかにした。

また、全空間のNavier-Stokes方程式に処罰法を適用して得られる方程式の解がパラメータ極限としてNavier-Stokes方程式の解に十分に近づくということを解析半群の理論を使って示すことにより、初期値問題に対する処罰法の数学的正当化を示した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計14件)

- ① 奥村 弘、双曲型の流体方程式に対するエルミート特性有限要素法の開発と評価、富山大学人間発達科学部紀要、査読無し、第6巻、第2号(2012)、221-234.
- ② 奥村 弘、松島紀佐、水口優、大森克史、津波の破壊力を消散させる未来型の防波堤「双胴型防波堤」の提案、ながれ、査読有り、Vol. 30, No. 6, pp. 469-473, 2011.
- ③ 奥村 弘、丸岡晃、大森克史、SLG特性有限要素法による3次元自由界面流れ解析への適用、第25回数値流体力学シンポジウム講演集、査読無し、USBメモリ、2011.
- ④ 奥村弘、特性有限要素法による表面張力の高精度計算法、富山大学総合情報基盤センター広報、査読無し、Vol. 7,

- pp. 53-56, 2010.
- ⑤ 奥村弘, 丸岡晃, 自由界面問題に対する Semi-Lagrange Galerkin (SLG) 法の評価、応用力学論文集、査読無し、Vol. 12, pp. 155-162, 2009.
- ⑥ K. Ohmori, N. Saito, Some remarks on the flux-free finite element method for immiscible two-fluid flows, J. Comput. Appl. Math. no.1, 査読有り, 232(2009), pp.127-138.
- ⑦ H. Murakawa, A relation between cross-diffusion and reaction-diffusion, Discrete Contin. Dyn. Syst. S, 査読有り, 5 (2012), 147-158.
- ⑧ A. Ducrot, F. Le Foll, P. Magal, H. Murakawa, J. Pasquier and G. Webb, An in vitro cell population dynamics model incorporating cellsize, quiescence, and contact inhibition, Math. Models Methods Appl. Sci. , 査読有り, 21 (2011), 871-892.
- ⑨ H. Murakawa, A linear scheme to approximate nonlinear cross-diffusionsystems, Math. Mod. Numer. Anal. , 査読有り, 45 (2011), 1141-1161.
- ⑩ H. Murakawa and H. Ninomiya, Fast reaction limit of a three-component reaction-diffusion system, J. Math. Anal. Appl. , 査読有り, 379 (2011), 150-170.
- ⑪ R. Eymard, D. Hilhorst, H. Murakawa and M. Olech, Numerical approximation of a reaction-diffusion system with fast reversible reaction, Chinese Annals of Mathematics B, 査読有り, 31 (2010), 631-654.
- ⑫ 村川秀樹, 反応 - 拡散の相互作用と非線形拡散, 数理解析研究所講究録, 査読無し, 1704 (2010), 187-194.
- ⑬ 村川秀樹, 放物型自由境界問題における界面の近似, 数理解析研究所講究録, 査読無し, 1633 (2009), 62-79.
- ⑭ H. Murakawa, A solution of nonlinear diffusion problems by semilinear reaction-diffusion systems, Kybernetika, 査読有り, 45 (2009), 580-590.
- [学会発表] (計 13 件)
- ① 奥村弘, 松島紀佐, 水口優, 大森克史, 津波の破壊力を消散させる未来型の防波堤「双胴型防波堤」の提案、日本流体力学回年会、首都大学東京、南大沢キャンパス、2011年9月9日
- ② 奥村弘, 丸岡晃, 大森克史, SLG 特性有限要素法による 3 次元自由界面流れ解析への適用、第 25 回数値流体力学シンポジウム, 2011 年 12 月 19 日.
- ③ 奥村弘, 丸岡晃, 特性有限要素法による自由界面問題の表面張力計算に関する検討、第 22 回計算力学講演会、金沢大学 (ka 角間キャンパス), 2009 年 10 月 11 日.
- ④ 村川秀樹, 反応拡散系近似:理論と応用, 日本数学会 2011 年度秋季総合分科会 (特別講演), 信州大学, 2011 年 9 月 30 日.
- ⑤ H. Murakawa, A linear scheme to approximate nonlinear cross-diffusion systems, Reaction-Diffusion Systems: Experiment, Modeling and Analysis, Universite Paris-Sud 11, France, 22 Oct. 2010.
- ⑥ H. Murakawa, A relation between reaction-diffusion interaction and nonlinear diffusion, The 8th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Dresden University of Technology, Dresden, Germany, 26 May 2010.
- ⑦ H. Murakawa, A solution of nonlinear diffusion problems by semilinear reaction-diffusion systems, Spatio-Temporal Patterns from Mathematics to Biomedical Applications, Archamps, France, 16 Mar. 2010.
- ⑧ H. Murakawa, A relation between reaction-diffusion interaction and cross-diffusion, EQUADIFF12, Masaryk University, Brno, Czech Republic, 21 Jul. 2009.
- ⑨ N. Yamaguchi
On a mathematical justification of the Penalty method for the Stokes and Navier-Stokes equations, 4th Japanese-Germany Workshop on Mathematical Fluid Dynamics, Waseda University, Tokyo, Japan, Nov. 2011
- ⑩ N. Yamaguchi
Remarks on the penalty method for the Stokes and Navier-Stokes equations, The 3rd China-Japan Workshop on Mathematical Topics from Fluid Mechanics, Northwest University, Xi' an, P.R. China, Oct. 2011.
- ⑪ N. Yamaguchi

On some stability Theorem of MHD equations, Regularity Aspects of PDEs, Stefan Banach 国際数学センター, Bedlewo, Poland, Sep, 2010.

⑫ N. Yamaguchi

On a stability of the MHD flow in 3D bounded domain, 2nd Japan-China workshop on Mathematical Topics from Fluid Mechanics, 九州大学西新プラザ, 2009.

⑬ N. Yamaguchi

N. Yamaguchi, Remarks on the penalty method for the Stokes and Navier-Stokes equations, the 3rd China-Japan Workshop on Mathematical Topics from fluid Mechanics, Northwest University, Xi' an, P. R. China, Oct. 2011.

[図書] (計 1 件)

田端正久、萩原一郎監訳、計算力学理論ハンドブック 第5章 p 型有限要素法 (大森克史翻訳) 2010, pp. 114-131.

[産業財産権]

○出願状況 (計 1 件)

名称: 消波構造体

発明者: 奥村弘, 松島紀佐

権利者: 奥村弘, 松島紀佐

種類:

番号: 011-194299

出願年月日: 2011 年 9 月 6 日

国内外の別: 国内

○取得状況 (計 0 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

取得年月日:

国内外の別:

[その他]

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

大森克史 (OHMORI KATSUSHI)

富山大学・人間発達科学部・教授
研究者番号: 20110231

(2) 研究分担者

山口範和 (YAMAGUCHI NORIKAZU)

富山大学・人間発達科学部・准教授

研究者番号: 50409679

奥村 弘 (OKUMURA HIROSHI)

富山大学・総合情報基盤センター・講師

研究者番号: 30355838

村川秀樹 (MURAKAWA HIDEKI)

九州大学・大学院数理学研究院・助教

研究者番号: 40432116

(3) 連携研究者

()

研究者番号: