

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 5 月 10 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2009～2012

課題番号：21540126

研究課題名（和文） 離散観測に基づく確率微分方程式の統計推測理論とその応用

研究課題名（英文） Statistical inference for stochastic differential equations from discrete observation and its applications

研究代表者

内田 雅之 (UCHIDA MASAYUKI)

大阪大学・大学院基礎工学研究科・教授

研究者番号：70280526

研究成果の概要（和文）：

固定区間上で観測された高頻度データに基づく確率微分方程式モデルのボラティリティパラメータの統計的漸近理論について研究を行った。具体的には、統計的確率場の多項式型大偏差不等式を用いて、ボラティリティパラメータの最尤型推定量とベイズ型推定量を導出し、漸近混合正規性及びモーメントの収束を証明した。また、エルゴード的拡散過程から得られる離散観測データを用いて、データの刻み幅 h とデータ数 n とのバランス条件 ($nh^p \rightarrow 0$, p は 2 以上の整数) の下で、ドリフトパラメータとボラティリティパラメータの適応的最尤型推定量を導出し、その漸近正規性及びモーメント収束性を証明した。さらに、誤特定されたエルゴード的拡散過程のドリフトパラメータとボラティリティパラメータの適応的最尤型推定量を導出し、その漸近的性質を示した。

研究成果の概要（英文）：We considered statistically asymptotic inference for volatility parameters of stochastic differential equations from high frequency data observed on the fixed interval. By using the polynomial type large deviation inequality for the statistical random field, we showed the asymptotic mixed normality of maximum likelihood type estimator and Bayes type estimator of the volatility parameter and the moments of convergences of the estimators. Under $nh^p \rightarrow 0$, where h is the discretization step size, n is the sample size and p is an integer value greater than 2, adaptive maximum likelihood estimators of both drift and volatility parameters for discretely observed ergodic diffusion processes were obtained, and their asymptotic normality and moment convergence were proved. Moreover, we treated adaptive estimators of drift and volatility parameters for misspecified ergodic diffusion processes from discrete observations and their asymptotic properties were shown.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009 年度	1,500,000	450,000	1,950,000
2010 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：高頻度データ，確率方程式，最尤型推定量，大偏差不等式

1. 研究開始当初の背景

近年，金融の分野において，ビッグデータの一つである金融高頻度データの解析が注目されている．その解析のツールとなり得る高頻度データに基づく非エルゴード的確率微分方程式モデルやエルゴード的確率微分方程式の統計的漸近理論の研究は理論と応用の両面において重要視されている．しかしながら，非エルゴード的確率微分方程式モデルに対する統計推測理論の整備は依然として不十分である．また，確率微分方程式によって定義されるエルゴード的拡散過程に従う高頻度でかつ長期間観測されたデータを用いて，ドリフトパラメータとボラティリティパラメータを精度よく推定する問題は，セミマルチンゲールの統計推測において根幹をなす問題であり，その効率的な推定法の開発が急務であった．さらに，拡散過程モデルが真のモデルを含むとは限らない場合（誤特定された拡散過程モデルを含む場合）に対するドリフトパラメータとボラティリティパラメータの適応的推定方法についてもあまり研究がなされていない状況であった．

2. 研究の目的

(1) 高頻度データに基づいた確率微分方程式モデル（非エルゴード統計モデル）のボラティリティパラメータの最尤型推定量とベイズ型推定量を構成し，それらの推定量の漸近混合正規性やモーメントの収束等の漸近的性質を証明して，非エルゴード的確率微分方程式モデルの統計的漸近理論の整備を行う．

(2) 確率微分方程式によって定義されるエルゴード的拡散過程モデルに対して，刻み幅とデータ数に関するなるべく弱い条件の下で，ドリフトパラメータとボラティリティパラメータを数値計算の意味で効率よく推定するための適応型統計手法の開発及びそれから得られる推定量の漸近正規性やモーメントの収束などの漸近的性質について証明し，確率微分方程式モデルの適応型推測理論の発展を目指す．

(3) エルゴード的拡散過程モデル（統計モデ

ル）が真の拡散過程を含んでいる場合（特定された拡散過程モデル）の統計的適応型推測理論を，拡散過程モデルが真の拡散過程を含んでいるとは限らない場合（誤特定を許す拡散過程モデル）に一般化する．さらに，適応的最尤型ボラティリティ推定量を応用して，拡散過程モデルが誤特定されているかどうかを判定する検定統計量を導出し，統計的仮説検定問題の定式化を試みる．

3. 研究の方法

(1) 非エルゴード的確率微分方程式に対して，局所正規近似に基づく統計的確率場を構成し，吉田朋広氏 (Yoshida (2011), Ann. Inst. Stat. Math.) により導出された多項式型大偏差原理を応用する．そして，局所正規近似に基づく近似尤度関数を用いて，最尤型推定量とベイズ型推定量を導出し，それらの漸近混合正規性（安定収束）及びモーメントの収束を示す．

(2) エルゴード的拡散過程の未知パラメータの適応的最尤型推定量を次のような手順で導出する．

① オイラー・丸山近似 (E-M 近似) に基づく近似尤度関数とデータの刻み幅に依存して伊藤・テイラー展開 (I-T 展開) された近似尤度関数を構成する．

② E-M 近似に基づく近似尤度関数を用いて初期最尤型ボラティリティ推定量を求める．

③ I-T 展開に基づく近似尤度関数と初期最尤型ボラティリティ推定量を用いて，適応的最尤型ドリフト推定量を算出する．

④ さらに，I-T 展開に基づく近似尤度関数と適応的最尤型ドリフト推定量を用いて適応的最尤型ボラティリティ推定量を導出する．

⑤ I-T 展開に基づく近似尤度関数の精度に応じて，③と④を繰り返す．

(3) 高頻度データに基づいて，誤特定を許す拡散過程モデルのドリフトパラメータとボラティリティパラメータの適応的最尤型推定量を導出し，その漸近正規性およびモーメント収束性を証明する．また，ボラティリティ項が誤特定された場合の適応的最尤型ボラティリティ推定量の収束率は，ボラティリティ項が特定された場合よりも悪くなると

予想しており、この性質を利用して、検定統計量を構成し、その漸近的性質を精査する。

4. 研究成果

(1) 区間 $[0, T]$ 上で定義された確率微分方程式から得られた観測幅 T/n の n 個の高頻度な離散データを用いて、ボラティリティパラメータに対する最尤型推定量とベイズ型推定量を構成し、その漸近的性質 (n が十分大きい場合) について考察を行った。具体的には、次の通りである。非エルゴード的な確率微分方程式に対して、統計的確率場の多項式型大偏差不等式を証明した。Genon-Catalot and Jacod (1993, Annales de l'Institut Henri Poincaré)で提案された近似尤度関数を用いて、最尤型推定量とベイズ型推定量を導出し、それらの漸近混合正規性及びモーメントの収束を示した。その際、統計的確率場の多項式型大偏差不等式を用いた。最尤型推定量とベイズ型推定量の漸近的挙動を検証するため、計算機シミュレーションを実施した。シミュレーション結果から、高頻度データに対して、提案した推定量がよい挙動をしていることが確認され、うまく機能していることが判明した。

(2) エルゴード的拡散過程のドリフトパラメータとボラティリティパラメータの適応的最尤型推定量を次のような手順で導出する。

① ボラティリティパラメータに関するシンプルなコントラスト関数(Genon-Catalot and Jacod (1993, Annales de l'Institut Henri Poincaré))を用いて、ボラティリティの初期推定量を求める。

② オイラー・丸山近似(E-M 近似)に基づく近似尤度関数と①で求めた初期ボラティリティ推定量を使って適応型ドリフト推定量を求める。データの刻み幅に依存して伊藤・テイラー展開(I-T 展開)された近似尤度関数を構成する。

③ I-T 展開に基づく近似尤度関数と②で求めた適応的最尤型ドリフト推定量を用いて、適応型ボラティリティ推定量を求める。

④ I-T 展開に基づく近似尤度関数と③で求めた適応的最尤型ボラティリティ推定量を用いて、適応型ドリフト推定量を求める。

⑤ I-T 展開に基づく近似尤度関数の精度に応じて、③と④を繰り返す。

これにより導出された適応的最尤型推定量が正則条件の下で、漸近正規性及びモーメント収束性をもつことを統計的確率場の大偏差不等式を用いて示した。さらに、シミュレーション結果から、従来のドリフトパラメータとボラティリティパラメータの同時最尤

型推定量に比べて、提案した適応的最尤型推定量は数値的に格段によりパフォーマンスをもつことが明らかになった。

(3) ボラティリティ項は特定されているが、ドリフト項が誤特定された拡散過程モデルに対して、適応的最尤型推定量の一致性及び漸近正規性を証明した。このモデルの場合は、特定化されたパラメトリックモデル(ドリフト項とボラティリティ項がともに特定化されているモデル)の場合と同様に、ドリフト推定量の収束率は \sqrt{T} (T はターミナル)であり、ボラティリティ推定量の収束率は \sqrt{n} (n はデータ数)であることが導き出され、ボラティリティ推定量の方がドリフト推定量よりも速く収束することが示された。一方、ボラティリティ項が誤特定された拡散過程モデルについても、適応型最尤推定量を導出し、その一致性および漸近正規性を示した。このモデルの場合には、同時最尤型推定法により導出されたボラティリティ推定量の場合と同様に、提案した適応的最尤型ボラティリティ推定量の収束率は特定されたパラメトリックな拡散過程モデルの場合よりも遅く(悪く)なること(退化収束率)が確認された。また、計算機シミュレーションによって、提案された適応的最尤型推定量の方が、先行研究の同時最尤型推定量よりも漸近的挙動が安定していることを検証した。ボラティリティ項が誤特定された場合の適応的最尤型ボラティリティ推定量の退化収束率を利用して、仮説検定問題を定式化し、適応的最尤型ボラティリティ推定量を用いて検定統計量を構成した。それが帰無仮説の下でカイ自乗分布に分布収束することや検定の一致性などの漸近的性質を証明した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5 件)

① Uchida M., (2011), Statistical inference for diffusion processes from discrete observations, Sugaku Expositions, 24, 169-181, 査読無

② Uchida M., and Yoshida N., (2011), Estimation for misspecified ergodic diffusion processes from discrete observations, European Series in Applied and Industrial Mathematics: Probability and Statistics, 15, 270-290,

査読有

- ③ Uchida M., (2010), Contrast-based information criterion for ergodic diffusion processes from discrete observations, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 62, no.1, 161-187, 査読有
- ④ 内田雅之, (2009), 小さな拡散過程のドリフトパラメータの推定, *統計数理*, 第57巻, 67-81, 査読有
- ⑤ Iacus S. M., Uchida M., and Yoshida N., (2009), Parametric estimation for partially hidden diffusion processes sampled at discrete times, *Stochastic Processes and their Applications*, 119, 1580-1600, 査読有

[学会発表] (計 11 件)

- ① 内田雅之, Adaptive estimation for ergodic diffusions under incorrect models, *Statistics for Stochastic Processes: Inference, Limit Theorems, Finance and Data Analysis*, 2012年3月12日, Institut Louis Bachelier in the former Paris bourse building, France
- ② 内田雅之, Adaptive estimation for misspecified diffusion processes, *Statistical Analysis and Related Topics: Theory, Methodology, and Data Analysis*, 2011年12月16日, University of Tokyo
- ③ 内田雅之, Adaptive ML-type estimators of ergodic diffusion processes, RIMS 研究集会「諸分野との協働による数理科学のフロンティア」, 2010年11月19日, 京都大学数理解析研究所
- ④ 内田雅之, Adaptive estimation of an ergodic diffusion process from discrete observations, *Korean Statistical Society conference*, 2010年11月5日, Kyonggi University, Korea
- ⑤ 内田雅之, Statistical estimation of the volatility for a stochastic differential equation, 34th Conference on Stochastic Processes and Their Applications, 2010年9月9日, Senri life science center building, Osaka
- ⑥ 内田雅之, Adaptive estimation of an ergodic diffusion process based on sampled data, *DYNSTOCH Meeting 2010*, 2010年6月19日, Bon Pasteur Accueil, Angers, France
- ⑦ 内田雅之, 高頻度データに基づくボラティリティパラメータの推定, *日本数学会 2010年度年会*, 2010年3月26日, 慶応大学
- ⑧ 内田雅之, Volatility estimation for a stochastic differential equation, *確率解析と統計的推測 V*, 2010年2月22日, 東京大学
- ⑨ 内田雅之, Parametric estimation of the volatility for a stochastic differential equation, *DYNSTOCH Meeting 2009*, 2009年10月10日, フンボルト大学, ドイツ
- ⑩ 内田雅之, Parametric estimation for partially hidden diffusion processes sampled at discrete times, *日本数学会 2009年度秋季総合分科会*, 2009年9月26日, 大阪大学
- ⑪ 内田雅之, 確率微分方程式のボラティリティの推定, *2009年度統計関連学会連合大会*, 2009年9月7日, 同志社大学

6. 研究組織

(1) 研究代表者

内田雅之 (UCHIDA MASAYUKI)
大阪大学・大学院基礎工学研究科・教授
研究者番号: 70280526