様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 4 月 25 日現在

機関番号：17501
研究種目：基盤研究（Ｃ）
研究期間：2009～2011
課題番号：21540139
研究課題名（和文）有限射影平面と対称分割デザイン

研究課題名（英文）Finite projective planes and symmetric divisible designs

研究代表者
末竹　千博（SUETAKE CHIHIRO）
大分大学・工学部・教授
研究者番号：80353241

研究成果の概要（和文）：任意の対称横断デザイン STD_2[12;6]の自己同型群の位数は 2 ベキと 3 ベキの積であることを示した。位数 9 の自己同型群 G を持つ位数 12 の射影平面 π が存在するならば, G は基本可換群で, G の固定点と固定直線の全体は π の部分平面にならないことを示した。位数 3 の elation を含む点とブロック上半正則に作用する位数 9 の巡回的でない自己同型群を持つ STD_6[18;3]と STD_7[21;3]を分類した。非同型な STD_8[24;3]が少なくとも 24 個あることを示した。

研究成果の概要（英文）：We proved that the order of an automorphism group of any symmetric transversal design STD_2[12;6] is $2^\alpha 3^\beta$ for some nonnegative integers α and β. We proved that if π is a projective plane of order 12 admitting a collineation group G of order 9, then G is an elementary abelian group and π is not planar. We classified STD_6[18;3]'s and STD_7[21;3]'s that have a semiregular nonisomorphic automorphism group of order 9 on both points and blocks containing an elation of order 3. We showed that the number of nonisomorphic STD_8[24;3]'s is at least 24.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2009 年度	700,000	210,000	910,000
2010 年度	500,000	150,000	650,000
2011 年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総　計	1800,000	540,000	2340,000

研究分野：代数的組合せ論, 有限幾何学
科研費の分科・細目：数学, 数学一般（含確率論・統計数学）
キーワード：対称横断デザイン, 対称分割デザイン, 一般アダマール行列, 有限射影平面

１．研究開始当初の背景

有限幾何学で有限射影平面の研究は基本的である。現在では有限射影平面は 2-デザインの特別なものであるが, 多くの有限幾何学は有限射影平面を様々な一般化を重ねて出来上がったものである。2-デザインはもともとは統計の配置の理論で扱われたものである。1980 年代に有限単純群の分類が完成されて, 多くの群論研究者が様々な分野に散っていった。それらの分野の一つとしてデザイン理論があった。彼等はデザインの自己同型群に着目して, 自己同型群を機軸として, デザインの特徴付けや分類を試み始めた。実際, 鈴木単純群が作用する有限射影平面として, Luneburg planes がある。群の研究にデザインが利用出来ることは知られており, 日本で

は 1970 年代に有限幾何，デザインの教科書的な本が岩波書店から 2 冊出版された。永尾汎先生の「群とデザイン」と都筑俊郎先生の「有限群と有限幾何学」がそうである。後者については，有限射影平面の自己同型群についての詳しい記述もある。

さて，有限射影平面の研究は 1900 年頃から始まった。最初に発見された非デザルグ射影平面は位数 9 の射影平面である。有限射影平面は点と直線からなる結合構造で，直線上にある点の個数は直線の取り方によらず一定である。有限射影平面の位数(直線上の点の個数から 1 を引いた数)は素数ベキであるかという問は最も重要な問題であるが，解決される兆しは全く見えていない。ただ，有限射影平面の全自己同型群が大きければ，その位数が素数ベキになる可能性が大で様々な研究成果が生まれている。しかし，全自己同型群の位数が小さい場合はほとんど進展が見られていないのが現状である。半世紀以前の結果, Bruck and Ryser の定理を超える結果は出ていない。この定理は自己同型群の仮定を全くしておらず，純粋に組合せの定理である。位数 n の有限射影平面の存在・非存在の問題は n を使ったある不定方程式を解く問題となるということがこの定理の主張である。非常に重要で美しい定理である。有限射影平面の部分構造としてはアファイン平面が良く知られていて，多くの研究がなされてきた。その大きなクラスとして, translation planes があり，現在も研究が続けられている。2007 年に "Handbook of finite translation planes" という本(N. L. Johnson, V. Jha, M. Biliotti 共著）が出版された。translation planes は quasifield という代数構造を用いて記述される。最近はその特別なクラスである semifields が，暗号理論などへの応用からも活発に研究されている。筆者も 1990 年代まで translation planes の研究にかかわった。

さて，有限射影平面の部分構造としての対称横断デザインは，アファイン平面ほど注目されていなかった。筆者は射影平面の研究に, この対称横断デザインが使えないか，また対称横断デザインの一般化された概念である対称分割デザインの一般論も役に立つのではないかと考え，存在・非存在が知られていない最小の有限射影平面である位数 12 の射影平面の研究に使った。対称横断デザインについて，これまで得られた一般的な結果としては，対称横断デザインにおける軌道定理がある。この定理は対称横断デザインの自己同型群の可能性を調べるのに有効である。またこの定理は有限射影平面における軌道定理の部分的な一般化となっている。それゆえ, 位数 12 の射影平面の自己同型群の可能性を調べるのに有効な道具となった。

有限射影平面の一般化として，対称 2 デザインがあるが，もう一つの一般化として対称横断デザインがあるのである。アファイン平面と同様，λ=1 の対称横断デザインは一意的にある有限射影平面に拡大できる。対称横断デザインの方はλも変化させるので，概念的にはもっと多くの幾何構造を扱うことになる。それらのクラスに対応する一般アダマール行列という広大なクラスがある。一般アダマール行列は，幾何的にはクラス正則対称横断デザインに対応している。その形から素数ベキ位数でない射影平面を研究するのに役に立つように思える。

一方，一般アダマール行列の研究は，主に de Launey によって推し進められて来た。(彼の現在の興味はアダマール行列に移っているようであるが。）Handbook of combinatorial designs (C. J. Colbourn, J. H. Dinitz による編集）には de Launey による一般アダマール行列についての概説 (p301-p306)があり，多くの未解決問題と予想が載っている。特にサイスが 100 よりも小さい一般アダマール行列についてこれまで知られていることの完全な一覧表が載っている。組合せ論的にはこの表を完成することに意味がある。例えば，小さいサイズでは, 以下の一般アダマール行列の存在がわかっていない。GH(3,13), GH(4,5), GH(5,6), GH(5,8)。
これらのパラメータについては，これまで何度も構成に挑戦して来たが，ことあるごとに失敗を重ねてきた。サイズが小さいからといって必ずしも易しいのではない。それらの存在は予想されているが，もしかしたら存在しないかもしれない。ただ, de Launey の表の GH(4,6), GH(4,10), GH(4,20)は最近埋めることが出来た。(それらは存在する。）ちなみに, de Launey は位数 4 の基本可換群の一般アダマール行列 GH(4,m)は任意の自然数 m に対して存在すると予想した。いずれにしても一般アダマール行列自身興味ある対象である。

２．研究の目的
(1) STD_2[12;6]の全自己同型群の可能性を調べる。この研究を位数 12 の射影平面の研究に役立てる。一般に, u が素数べきでない対称横断デザイン STD_λ[k;u]の存在は知られていない。STD_2[12;6]はそのような対称横断デザインで存在・非存在が知られていない最小のものであることも注意しておく。
(2) elation group を含む点とブロック上半正則自己同型群を持つ対称横断デザインの研究をする。elation group を含む半正則自己同型群を仮定したことがこの研究の重要なアイデアである。この研究から新しい対称横断デザインの構成を試みる。小さい k に対

して，クラス正則 STD_{k/3}[k;3]の分類を試みる。
(3) 点とブロック上必ずしも半正則でない(点またはブロックどちらか一方は半正則であってもよい)対称横断デザインの研究をする。またそのために具体例をつくる。この研究は，位数 3 の elation を含む位数 9 の半正則自己同型群を持つ STD_8[24;3]が無いらしいことに気づいて開始された。

３．研究の方法

(1) STD_2[12;6]の全自己同型群の可能性を群環と指標を用いて調べる。位数 12 の射影平面の 3 ベキの自己同型群の形とその点と直線の上への作用の仕方を群環と指標を用いて調べる。
(2) elation group を含む点とブロック上半正則自己同型群を持つ対称横断デザインを群環を用いて調べる。この一般論を利用して，ある条件の仮定のもとで，クラス正則 STD_6[18;3]と STD_7[21;3]を分類する。
(3) 点とブロック上必ずしも半正則でない(点またはブロックどちらか一方は半正則であってもよい)対称横断デザインの研究を，まずはクラス正則 STD_8[24;3]で実験してみる。(1),(2),(3)の何れの研究もコンピュータを利用した。

４．研究成果

(1) 存在・非存在が知られていない有限射影平面の最小位数は 12 である。もし位数 2 の自己同型を持つ位数 12 の射影平面が存在すれば，STD_2[12;6]が存在する。従って，もし STD_2[12;6]が存在しないならば，位数 2 の自己同型を持つ位数 12 の射影平面は存在しない。次の結果を得た。任意の STD_2[12;6]の自己同型群の位数は 2 ベキと 3 ベキの積である。この研究で得られた結果はまだまだ大雑把であり，2 ベキと 3 ベキを実際どの程度小さくすることが出来るか調べる必要がある。しかしながら，一方で一般的な考察も必要である。しばらく時間をおいてこの研究の続きをしたい。
(2) 位数 u の elation group を含む，点とブロック上に半正則に作用する自己同型群 G を持つ対称横断デザイン STD_λ[k;u]を群環 Z[G]を用いて特徴づけた。u=2 のときは，対称横断デザイン STD_λ[k;2]には位数 k の一般アダマール行列が対応する。そこで次の u である u=3 についてこの一般論から何が得られるか調べた。この場合，u が小さいため計算機の助けを借りることも出来る。n_λを非同型な STD_λ[3λ;3]の個数とすると，n_1=1, n_2=1, n_3=4, n_5=0 が知られている。上記の特徴づけを用いて，位数 3 の elation を含む点とブロック上半正則に作用する位数 9 の非巡回的自己同型群を持つ STD_6[18;3]と STD_7[21;3]を分類した。この結果は n_6≧20 と n_7≧5 を導く。この研究は次の 2 つの研究に発展させられた。このことについても述べておく。

Hiramine はこの研究で述べられた一般論を対称横断デザインを含む一般的な概念である横断デザインに適用し，一般アダマール行列を含む変形一般アダマール行列を定義した。そして，彼はクラス正則でない対称横断デザイン STD_q[q^2;q] (q は素数べき)を沢山構成した。興味ある点はこの構成が，アファイン平面を構成するのに使われる spread を用いていることである。しかしながら，この STD_q[q^2;q]の自己同型群はよく分かっていなくて，必ずしも大きくはならないらしい。筆者はこの構成が位数 q^2 の射影平面を構成するのに役に立つに違いないと思っている。translation planes でない Hughes planes や Figueroa planes を含むクラスの存在を予感させる。筆者たちの研究が Hiramine によって発展させられたことは，有限射影平面の新たな研究の糸口を導くかも知れない。Hiramine のこの研究は，2010 年 Des. Codes Cryptogr. 56 (Modified generalized Hadamard matrices and construction for transversal designs)で述べられている。

一方，クラス正則 STD_6[18;3]の構成の研究は符号理論の研究者たちからも興味を持たれた。Harada, Lam, Munemasa, Tonchev は，Classification of generalized Hadamard matrices H(6,3) and quaternary Hermitian self-dual codes of length 18, Electronic J. combin. 17(2010) でクラス正則 STD_6[18;3]を符号理論の手法を使って完全分類した。それらは 85 個あった。
（3）非同型なクラス正則 STD_8[24;3]が少なくとも 24 個あることを示した。この研究で構成した対称横断デザイン STD_8[24;3]はすべて次の性質を持つ，位数 3 の elation を含む位数 9 の自己同型群 G を持つ。G はブロック集合上半正則であるが，点集合上半正則でない，またはブロック集合上半正則でないが，点集合上半正則である。また，得られたクラス正則 STD_8[24;3]はすべて自己双対的でない。対応する一般アダマール行列はもちろん GH(3,8)である。GH(3,8)の別な構成については，de Launey によるものと，Zhang たちによるものが知られている。Zhang たちによって構成されたものの一つと異なることはチェックしたが，de Launey の構成したものは手に入らなかったので異なるかどうかはチェック出来ていない。また，我々が構成したすべてのクラス正則 STD_8[24;3]について，全自己同型群の位数と点クラスたちとブロッククラスたちの上

への軌道分解も調べた。全自己同型群の位数の種類は以下の通りである。6×3, 9×3, 18×3, 36×3, 96×3。ここで elation group の位数 3 を明示するため全自己同型群の位数を積の形で書いた。以下この研究で気づいたことと，この研究の発展すべき姿についてもコメントしておく。

すべての素数ベキ q に対して，GH(q,8)が存在するという de Launeym の予想があるが，q=3 の場合の一つの構成例となっている。de Launey, Dawson は，P=5,7,11,13,17,19 を除くすべての素数 p に対して，GH(p,8)が存在することを証明した。大きい素数に対して解決出来ていて，小さい素数の場合が難しいというのは奇妙であるが，構成方法を眺めるとそのことが納得できる。筆者の最近の観察によると鳩野氏と筆者のこの構成は GF(3)上の 2 変数の高々2 次関数を用いて記述できる。この構成方法は，Dawson, de Launey の構成で用いられたものであるが，彼等の構成方法とはある重要な点で 異なっている。筆者達の構成方法は上記の欠けた p に対して GH(p,8)の構成に役立てる可能性がある。

一般アダマール行列の直接的な構成は以外と難しい。有限射影平面と関係したパラメータを持つ GH(q^a,q^b)（q は素数ベキ，a は自然数，b は非負整数）の構成は，構成が比較的容易であるが、そうでない場合は無限系列を構成するのは非常に難しい。後者については，Dawson, de Launey の 2 変数の GF(q)上の高々2 次関数を使うアイデアが一番強力のように思える。このアイデアは有限体の平方元と非平方元の性質を使うことに帰着するので有用なのである。3 次以上の関数ではうまく行かない。また彼等のアイデアの優れているところは，一般アダマール行列を有限体上の 2 変数の関数で記述している点である。関数を使わなければ，面白いパラメータを持った一般アダマール行列を構成するのは難しいと思う。今後の研究の一つとして，2 変数の高々2 次関数をうまく組み合わせて，p=5,7,11,13,17,19 に対して GH(p,8)を構成することを考えている。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 4 件）

① Teppei Hatono and Chihiro Suetake, On symmetric transversal designs STD_8[24;3]'s, 査読有, International Journal of Combinatrics,2010, 14pp(2010)

② Kenzi Akiyama, Masayuki Ogawa, and Chihiro Suetake , On STD_6[18,3]'s and STD_7[21,3]'s admitting a semiregular automorphism group of order 9, 査読有, Electron. J. Combin. 16, 21pp(2009)

③ Kenzi Akiyama and Chihiro Suetake, On projective planes of order 12 with a collineation group of order 9, 査読有, Australas. J. Combin. 43, 133-162 (2009)

④ Chihiro Suetake, Automorphism group of a symmetric transversal design STD_2[12;6], 査読有, Journal of Statistical Theory and Practice 3, No.2, 429-443(2009)

〔学会発表〕（計 11 件）

① 末竹千博, 捩れ巡回型一般アダマール行列, 小研究集会 有限幾何学とその周辺, 2011 年 12 月 11 日, 大分大学

② 末竹千博, EA(4)上の一般アダマール行列, Hadamard 行列とそれに関係する代数的組合せ論, 2010 年 12 月 12 日, 神戸学院大学

③ 末竹千博, 対応する STD が位数 2 の elation を持つ GH(GF(4),m) と GH(GF(4),5), 小研究集会 有限幾何学とその周辺, 2010 年 11 月 13 日, 熊本大学

④ 秋山献之, 末竹千博, 田中正紀, Generalized Hadamard matrices GH(4,2m) over GF(4), 2010 Algebraic and geometric combinatrics conference, 2010 年 7 月 15 日, 韓国 慶州 Concorde ホテル

⑤ 秋山献之, 末竹千博, 田中正紀, Generalized Hadamard matrices over GF(4) and Hadamard matrices, 第 27 回代数的組合せ論シンポジウム, 2010 年 6 月 22 日, 高知大学

⑥ 末竹千博, GF(4)上の一般アダマール行列の構成とそれに付随したアダマール行列, 小研究集会 有限幾何学とその周辺, 2010 年 5 月 8 日, 熊本大学

⑦ 鳩野哲平, 末竹千博, 対称横断デザイン STD_8[24;3]について, 第 122 回日本数学会九州支部例会, 2010 年 2 月 13 日, 九州大学西新プラザ

⑧ 秋山献之, 末竹千博, 田中正紀, クラス正則対称横断デザイン STD_5[20;4]についてと直交配列 OA(80,12,4,2)の存在, 代数的組合せ論および関連する群と代数, 2009 年 11 月 19 日, 信州大学

⑨ 秋山献之, 末竹千博, STD_λ[3λ;3]'s (λ<=7)の分類について, 小研究集会 有限幾何学とその周辺, 2009 年 10 月 17 日, 近畿大学

⑩ 秋山献之, 小川雅之, 末竹千博, On STD_6[18,3]' and STD_7[21,3]'s

admitting a semiregular automorphism group of order 9, 第26回代数的組合せ論シンポジウム, 2009年6月24日, 山形県生涯学習センター

⑪ 末竹千博, クラスサイズ4の対称横断デザインについて, ミニ研究集会　有限幾何学とその周辺, 2009年5月16日, 東海大学阿蘇キャンパス

６．研究組織

(1)研究代表者

末竹　千博（SUETAKE CHIHIRO）

大分大学・工学部・教授

研究者番号：80353241

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

なし