

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年5月18日現在

機関番号：32644

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2009～2011

課題番号：21540145

研究課題名（和文）有限点集合に存在する凸体の離散幾何学的考察

研究課題名（英文）Combinatorial properties on convex sets by a finite point set.

研究代表者

占部 正承 (URABE MASATSUGU)

東海大学・清水教養教育センター・教授

研究者番号：30256177

研究成果の概要（和文）：次の条件を満たす最小数  $f(k)$  をみつけよ「平面上の一般の位置（どの3点も同一直線上にない）にある少なくとも  $f(k)$  個の点からなる配置には、与えられた点を内包しない凸  $k$  角形の頂点に位置する  $k$  点が必ず存在する」この問題は  $k=6$  の場合についてのみ、未だ正解が決定されていない有名な未解決問題である。この問題をコンピュータを用いて解決する事を主眼とし、様々な点の配置に関する「離散幾何学」の未解決問題の解決に取り組んだ。

研究成果の概要（英文）：“Find the smallest integer  $f(k)$  so that any set of  $f(k)$  points in the plane, no three collinear, contains the vertices of a convex  $k$ -gon, whose interior contains no points of the set.” The above problem for  $k=6$  is a famous open problem. Our main purpose is to settle the question of the existence of  $f(6)$ . Furthermore, we tried to find and solve other several discrete geometry problems for a finite point set in this research project.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,700,000	550,000	2,250,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
2011年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,500,000	1,090,000	4,590,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：応用数学・組合せ論・離散幾何学

## 1. 研究開始当初の背景

「離散幾何学」は幾何学の中でも離散的対象の様々な問題を研究する“組合せ理論”の中の一つの分野であり、この中でも特に「点

集合から生成される凸多角形の存在性」は、現在も盛んに研究されているテーマである。1935年、P. Erdos と G. Szekeres は次の定理を示した「3以上の任意の自然数  $k$  に対して、

次の条件をみたす  $ES(k)$  が存在する；平面上の一般の位置にある少なくとも  $ES(k)$  個の点からなる任意の配置には、必ず凸  $k$  角形の頂点に位置する  $k$  点が存在する」そして  $ES(k)$  について、 $ES(k) = 2^{\lceil k/2 \rceil} + 1$  を予想した。この問題は 1970 年に  $k=5$  の場合が、そして 2006 年に  $k=6$  の場合がコンピュータを用いて示される程の難問で、75 年以上経った現在でも、7 以上の  $k$  に対しては未解決である。我々はこれまで、これらの問題に関連する様々な問題群に取り組んでいる。その中でも以下に示す 4 つの問題が、本研究に関連する問題群である：

- (1) 与えられた点集合を、互いに素な凸多角形へ分割した時、その最小数を決定する問題。
- (2) 1975 年に P. Erdos が提示した次の問題「3 以上の任意の自然数  $k$  に対して、次の条件をみたす  $X(k)$  が存在するか；平面上の一般の位置にある少なくとも  $X(k)$  個の点からなる任意の配置には、与えられた点を内包しない凸  $k$  角形の頂点に位置する  $k$  点が存在する」について考察すること。
- (3) 与えられた点集合に存在する、内点を含まない三角形の最大面積を評価する問題。すなわち平面上の一般の位置にある  $n$  点集合  $P$  に対して 比率  $F(P) = \max\{(P \text{ が形成する三角形の面積}) / (P \text{ の凸包の面積})\}$  を評価すること。
- (4) 与えられた点を内部に含まない、互いに素な凸多角形の存在性に関する問題。(1) では、与えられた  $n$  点集合に存在する凸多角形の分割数を評価するが、この問題では「点数が少ない配置に対して、どのような凸多角形が存在するか」を詳細に調べる事が主眼となる。

## 2. 研究の目的

本研究では、これまでに研究・発表してきた上述の問題群を解決する事を優先課題とし、その過程で生まれる数多くの新しい問題を解決してゆきたいと考えている。離散幾何学は、コンピュータやロボットの理論等に有益な結果を与えている「計算幾何学」と密接な関連をもっているので、その理論的な側面を支えるこれらの問題群を、数学的に解決してゆく事は非常に重要である。

また、離散幾何学の問題をコンピュータを用いて解決してゆく方向性も、近年の流れである。特に (2) の問題は  $k \neq 6$  に対してすべて解決され、 $k=6$  の場合については「有限である」事が 2006 年に数学的に証明された。そしてこの 35 年間に得られた研究成果は、コンピュータを使って題意をみたさない配置を決定する事が中心であった。すなわち、内部に点を含まない凸 6 角形が存在しない配置を見つける事である。具体的には、1985 年 D. Avis 氏と D. Rappaport 氏が初めてその配

置を決定するコンピュータ・プログラムを開発し、その後この方法が様々な研究者により拡張され、現在のレコードは 2003 年に M. H. Overmars 氏によって発見された 29 点の配置である。すなわち  $X(6) \geq 30$  が示された。本研究では、このプログラムを改良し、新しい配置を見つける事を試みる。

## 3. 研究の方法

(1) 「1. 研究開始当初の背景」で述べた関連問題の (1)、(3)、(4) については、我々が提起し、国際誌に掲載されている問題群であるので、国内外の論文・国際会議での講演等を注視し、研究活動に励む事に尽きる。

(2) 「1. 研究開始当初の背景」で述べた関連問題の (2) の問題については、設備備品により購入した高速コンピュータによる実験を本格始動する。プログラムの開発に当たっては、1985 年の大型コンピュータによる稼働で使われた D. Avis 氏と D. Rappaport 氏の初期プログラムを解析し、そこに新たな方法を加える事で、他の研究者が行った方向性とは違うアプローチで探索処理を行う。図 1 はこの処理のフローチャートである。以下にこの詳細について述べる。

### ① 探索の手法

与えられた点配列  $(x, y)$  を  $x$  座標の昇順に並べ替え、互いの 2 点間の傾きを計算する。更にこの傾きを昇順に並べ替え、点配列との対応付けを行う。次にこれらの点で作る多角形の点配列を表現したマトリクス (探索マトリクス) を作成する (図 2)。これらの処理は D. Avis & D. Rappaport 氏によるアルゴリズムを用いた。次に探索マトリクスから六角形の存在しない点配列を探し出す「探索アルゴリズム」を考案した。

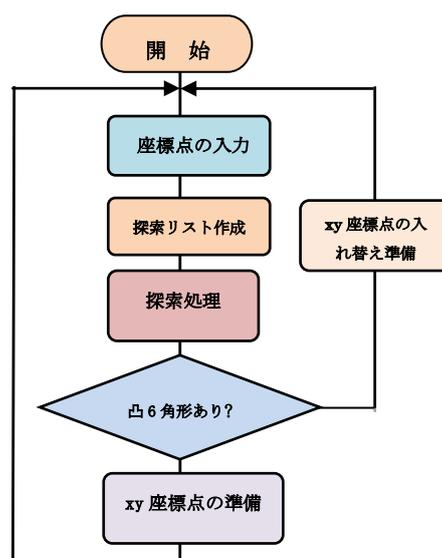


図 1 処理フローチャート

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	1	1	1	1	1	1	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0
2	1	1	1	1	1	1	1	0
3	1	1	1	1	0	1	0	0
4	1	0	1	0	1	0	1	0
5	1	0	1	1	0	1	0	0
6	1	0	1	0	1	0	1	0
7	0	0	0	0	0	0	0	1

図2 探索マトリクス(n=8の例)

②探索アルゴリズム

探索マトリクスから六角形以上の多角形が存在しない点配列を探索する方法として、第一に、次のような探索リストを作成する。図2はn=8の例である。

この探索マトリクスで作成される探索リストを順次探索し、連続するリストの長さが6を超えない点の配列を探し処理を行う。しかしながら、この方法では $2^n$ 個の探索を行うため、探索リスト数×リストの長さという膨大なプログラムの記憶領域を必要とする。

③探索リストの作成

全ての点における探索リスト作成を可能とし、かつ記憶領域の問題を解決する方法として次のような方法を考案する。

0	1	2	3	4	5	6	7	0	2	3	4	5	6	7
0	1	2	3	4	5	7	0	2	3	4	5	7		
0	1	2	3	4	6	7	0	2	3	4	6	7		
0	1	2	3	4	7	0	2	3	4	7				
0	1	2	3	5	6	7	0	2	3	5	6	7		
0	1	2	3	5	7	0	2	3	5	7				
0	1	2	3	6	7	0	2	3	6	7				
0	1	2	3	7	0	2	3	7						
0	1	2	4	5	6	7	0	2	4	5	6	7		
0	1	2	4	5	7	0	2	4	5	7				
0	1	2	4	6	7	0	2	4	6	7				
0	1	2	4	7	0	2	4	7						
0	1	2	5	6	7	0	2	5	6	7				
0	1	2	5	7	0	2	5	7						
0	1	2	6	7	0	2	6	7						
0	1	2	7	0	2	7								
0	1	3	4	5	6	7	0	3	4	5	6	7		
0	1	3	4	5	7	0	3	4	5	7				
0	1	3	4	6	7	0	3	4	6	7				
0	1	3	4	7	0	3	4	7						
0	1	3	5	6	7	0	3	5	6	7				
0	1	3	5	7	0	3	5	7						
0	1	3	6	7	0	3	6	7						
0	1	3	7	0	3	7								
0	1	4	5	6	7	0	4	5	6	7				
0	1	4	5	7	0	4	5	7						
0	1	4	6	7	0	4	6	7						
0	1	4	7	0	4	7								
0	1	5	6	7	0	5	6	7						
0	1	5	7	0	5	7								
0	1	6	7	0	6	7								
0	1	7	0	7										

図3 探索リスト(n=8の例)

探索リストにおいて、任意の  $n$  ( $n \geq 8$ ) で作成される全ての探索リスト中で、連続するリストの長さが6を超えない基本リスト(32個： $n-6 \sim n-1$ )と組み合わせリスト(0 $\sim n-7$ )を作成する。これらのリストを用いることで任意の  $n$  個( $n \geq 8$ )の点配列の探索処理を行うことが可能となる。

以上のアルゴリズムからコンピュータ・プログラムの開発を行う。

4. 研究成果

(1)「1. 研究開始当初の背景」で述べた関連問題の(2)の問題については、導入したサーバに「3. 研究の方法」の(2)で述べたコンピュータ・プログラムを適用し、探索処理を行った。その結果、最大27点を含むおよそ数十種類の配置を見つけることができた。以下に27点の例を示す。

表1 27点の点配列

	x	y		x	y
1	1	1260	15	446	565
2	16	743	16	449	518
3	22	531	17	450	498
4	37	0	18	453	542
5	366	552	19	458	526
6	371	487	20	489	537
7	374	525	21	492	502
8	392	575	22	496	579
9	396	613	23	516	467
10	410	539	24	552	502
11	416	550	25	754	697
12	426	526	26	777	194
13	434	552	27	1259	320
14	436	535			

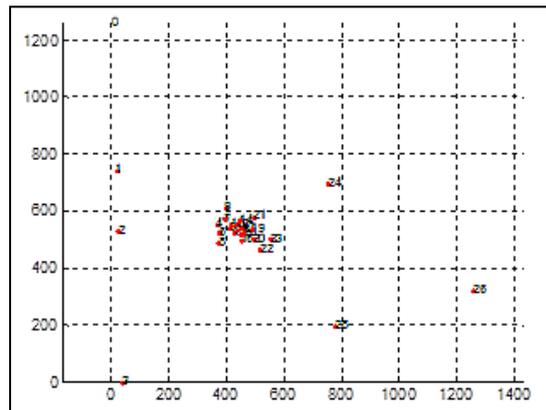


図4 27点の点配列

今回の科研費報告書を作成する段階において、30点以上の新しい配置の発見には至っていない。しかし現在もこのプログラムでの処理は続行しており、その成果が望まれる。

(2) 科研費の使用状況を鑑み、高速コンピュータによる研究方法・成果を詳細に述べた

が、数学的な研究成果を以下に列挙する：

- ①「1. 研究開始当初の背景」で述べた関連問題の (3) について、 $F(P) = \max\{(P \text{ が形成する三角形の面積}) / (P \text{ の凸包の面積})\}$  の下界の改良に成功している。またこの問題を解決するにあたり、問題群 (4) に関する新しい結果も証明されている (雑誌論文①、学会発表⑤、⑩)
- ②「1. 研究開始当初の背景」で述べた関連問題の (1) について、殆ど正解に近い値を示すことに成功したので、国際会議にて講演した (学会発表①)。この結果は、現在投稿準備中である。
- ③Calderon-Zygmund 型の特異積分作用素の有界性を Journé による条件を weak-type に緩めた条件から示す方法を紹介し、その応用について述べた (学会発表②)
- ④与えられた点を被覆する円の存在性について、自明で無い結果を示す事が出来たので、国際会議にて講演した (学会発表③)
- ⑤BMO, bounded mean oscillation と呼ばれる性質を有するユークリッド空間上にて定義された関数に対して、John-Nirenberg inequality と呼ばれる基本的な不等式がある。BMO の関数を Ergodic system として定義されている確率論的な設定において考え、その立場で John-Nirenberg inequality を定式化した (雑誌論文②)
- ⑥通常の  $p$  乗可積分の関数の空間に対して、ベキの  $p$  が関数と同じ変数を持つ関数空間として変動指数空間と呼ばれるものがある。そこでのCalderon-Zygmund 型の特異積分作用素の有界性のそれまでとは別の方法による証明と、条件をそれまでより少しばかり弱めた定理を述べた (学会発表⑧)
- ⑦「1. 研究開始当初の背景」で述べた関連問題の (1) に関連する新しい問題を提起し、自明でない結果を得た (学会講演⑨)
- ⑧「1. 研究開始当初の背景」で述べた関連問題の (4) について、新たな結果を示した (学会講演⑩)

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 2 件)

- ① Kiyoshi Hosono, On an empty triangle with the maximum area in planar point sets, Discrete Mathematics, 査読有、Vol. 311, 2011, pp. 1886-1891
- ② Lasha Ephremidze and Nobuhiko Fujii, The John-Nirenberg Inequality for Ergodic Systems, Far East Journal of Dynamical Systems, 査読有、Vol. 11, Issue 1, 2009, pp. 49-56

[学会発表] (計 11 件)

- ① Kiyoshi Hosono, Masatsugu Urabe, On disjoint empty convex polygons for a planar point set, Japan Conference on Discrete and Computational Geometry, 2011 年 11 月 28 日、Tokai University, Tokyo
- ② Nobuhiko Fujii, A method to obtain  $L^p$ -boundedness from weak type conditions, Continuum Mechanics and Related Problems of Analysis, 2011 年 9 月 12 日、Tbilisi State University, Georgia
- ③ Kiyoshi Hosono, Masatsugu Urabe, Empty disks supported by a point set, XIV Spanish Meeting on Computational Geometry, 2011 年 6 月 28 日、Universidad de Alcala, Spain
- ④ 秋山正寿, 山崎淳市, 東太平洋赤道域における海水中  $CO_2$  分圧の変動に関する研究、海洋理工学会平成 22 年度秋季大会、2010 年 10 月 13 日、京都大学
- ⑤ Kiyoshi Hosono, On an empty triangle with the maximum area in planar point sets, The 7th Japan Conference on Computational Geometry and Graphs, 2009, 2009 年 11 月 11 日、Japan Advanced Institute of Science and Technology
- ⑥ Kunio Kutsuwada, Masatosi Akiyama, Gridded Data Set of Global Surface Fluxes constructed by Satellite Data: J-OFURO V2, International Symposium on Remote Sensing 2009, 2009 年 10 月 29 日、Pukyong National University
- ⑦ Masahisa Kubota, Masatosi Akiyama, INTRODUCTION OF JAPANESE OCEAN FLUX DATA WITH USE OF REMOTE SENSING OBSERVATIONS (J-OFURO) VERSION 2, OceanObs'09, 2009 年 9 月 9 日、Venice Convention Centre, Venice-Lido, Italy
- ⑧ 藤井信彦, Variable exponent spaces と特異積分、日本数学会秋季総合分科会、2009 年 9 月 24 日、大阪大学
- ⑨ 占部正承, On a minimal planar point set with two interior-disjoint empty convex polygons, 離散数学とその応用研究集会 2009, 2009 年 8 月 10 日、茨城大学
- ⑩ Kiyoshi Hosono, On a triangle with the maximum area in planar point sets, Seminar on Discrete and Computational Geometry, 2009 年 7 月 12 日、東海大学
- ⑪ 占部正承, Partitioning planar point sets into distinct holes, 離散幾何とグラフ理論 1 日研究集会、2009 年 5 月 23 日、東海大学

6. 研究組織

(1) 研究代表者

占部 正承 (URABE MASATSUGU)  
東海大学・清水教養教育センター・教授  
研究者番号：30256177

(2) 研究分担者

藤井 信彦 (FUJII NOBUHIKO)  
東海大学・清水教養教育センター・教授  
研究者番号：60228955

秋山 正寿 (AKIYAMA MASATOSHI)  
東海大学・清水教養教育センター・教授  
研究者番号：50246146

細野 潔 (HOSONO KIYOSHI)  
東海大学・清水教養教育センター・教授  
研究者番号：40238754

(H21→H22：連携研究者)

(3) 連携研究者

細野 潔 (HOSONO KIYOSHI)  
東海大学・清水教養教育センター・教授  
研究者番号：40238754

(H23：研究分担者)