

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年5月17日現在

機関番号：32665

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2012

課題番号：21540148

研究課題名（和文） 特殊関数論の視点に基づくソボレフ不等式の最良評価

研究課題名（英文） Best evaluation of Sobolev inequality based on the perspective of special function theory

研究代表者

武村 一雄（TAKEMURA KAZUO）

日本大学・生産工学部・助教

研究者番号：60367216

研究成果の概要（和文）：

$2M$ 階微分作用素 $(-1)^M(d/dx)^{2M}$ の自己共役境界値問題において、固定端自由端境界条件をもつ場合に対応するソボレフ不等式の最良評価（最良定数、最良関数）を得た。また低階項がある n 階フルヴィッツタイプ微分作用素に対応するソボレフ型不等式の最良評価も得ることができた。連続版のソボレフ不等式の最良評価と並行して進めてきた離散版のソボレフ不等式においては、離散版マイナ斯拉シアンに対応するソボレフ不等式を正多面体の場合に計算することができた。この他に、糸のたわみ問題についても離散ソボレフ不等式の最良評価を得た。こうした結果は今後の離散版ソボレフ不等式の研究を行う上での足がかりとなる結果といえる。

研究成果の概要（英文）：

In the self-adjoint boundary value problem of $2M$ -th order $(-1)^M(d/dx)^{2M}$ differential operator, best evaluation (best constant, best function) of a Sobolev inequality corresponding to clamped-free boundary condition were obtained. We also obtained the best evaluation of a Sobolev type inequality corresponding to the n -th order Hurwitz differential operators. In the Sobolev inequality of the discrete version that has proceeded in parallel with the best evaluation of the Sobolev inequality of the continuous version, we were able to compute the best constant of discrete Sobolev inequality on regular M -hedron for $M=4, 6, 8, 12, 20$. In addition to this result, we obtained the best evaluation of the discrete Sobolev inequality corresponding to a bending problem of a string. These are important results to become the clue in studying the future discrete Sobolev inequality.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
2010年度	900,000	270,000	1,170,000
2011年度	500,000	150,000	650,000
2012年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
総計	3,200,000	960,000	4,160,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：ソボレフ不等式

1. 研究開始当初の背景

ソボレフ不等式については、1930年に G. Bliss, 1976年に G. Talenti, T. Aubin が独

立に最良定数を求めて以来、ほとんど未解決であった。

過去数年間、数理物理学・工学の分野に登

場する各種微分方程式の境界値問題に対するグリーン関数を求め、その再生核としての構造を調べた。グリーン関数の満たす再生等式からソボレフ不等式を導出し、不等式の最良評価（最良定数、最良関数計算）をグリーン関数を利用して求めた。境界値問題によっては、グリーン関数がベルヌーイ多項式、超幾何関数、球面調和関数などさまざまな特殊関数で記述され、ソボレフ不等式は特殊関数に関する新しい不等式や恒等式を与える。この事実に基づいて、特殊関数論とソボレフ不等式間の双方向への応用を中心に研究を進めた。

2. 研究の目的

(1) グリーン関数の構造：数理物理、工学の諸分野に登場する高階常微分方程式の各種境界値問題を設定し、グリーン関数の行列式表現や積分表示を求める。境界条件の種類によっては零固有値の存在ゆえにグリーン関数が求まらない場合がある。その場合も直交条件と呼ばれる条件を課すことによって、グリーン関数を一意に求めることが可能である。

(2) 再生核（グリーン関数）とソボレフ不等式の最良評価：近年の研究でグリーン関数はヒルベルト空間を適切に定めるとその再生核になることが分かった。グリーン関数と再生核との対応関係を調べることにより、境界値問題と再生核ヒルベルト空間との対応を明らかにする。再生核理論から最良定数はグリーン関数の対角線値の最大値に等しい。これまで蓄積してきたグリーン関数の詳細な情報をもとに、ソボレフ不等式の最良定数、最良関数を計算する。

(3) 特殊関数論への応用：グリーン関数はしばしば各種特殊関数で書かれる。つまりソボレフ不等式は特殊関数に関する1つの評価を与える。またソボレフ不等式で等号を達成する最良定数を計算することで、特殊関数に関する恒等式を与える。上記項目(2)によって得られた最良評価から連続・離散特殊関数の満たす性質（不等式、恒等式）をソボレフ不等式の立場から詳細に調べる。

3. 研究の方法

役割分担を決めた上で各テーマについて各自独立に研究を進め、電子メールなどを中心に研究の進展について連絡を取る。武村、永井は同じ所属機関にいるため、互いに研究連絡を密に取る。また年に4回のペースで3名が関西に集まりセミナーを開催、研究報告、議論を行う。得られた研究成果は毎年2回日本数学会函数解析分科会や国際会議において発表する。研究の効率化を計るため

研究組織の各メンバーの専門分野を考慮して、基本的に以下の通り研究の役割分担を決める。

(平成21年度)武村：各種境界値問題のグリーン関数を求め、その性質、特に正值性と対角線値の挙動を調べる。亀高：グリーン関数と再生核との関連を調べる。ソボレフ不等式の最良評価を行う。永井：グリーン関数の離散化を行う。離散ソボレフ不等式の最良評価を行う。

(平成22年度以降)武村：重調和作用素など偏微分方程式の境界値問題に対するグリーン関数の計算と性質究明、亀高： L^p ソボレフ不等式の最良評価、永井：重調和作用素に対応したソボレフ不等式の最良評価と離散化を行う。

4. 研究成果

$2M$ 階微分作用素 $(-1)^M(d/dx)^{2M}$ の自己共役境界値問題において、固定端自由端境界条件をもつ場合に対応したソボレフ不等式の最良評価（最良定数、最良関数）を得た（雑誌論文⑥）。ヒルベルト空間を適切に定めることにより境界値問題から得られたグリーン関数 $G(x, y)$ が再生核となった。ソボレフ不等式の最良定数は、グリーン関数の対角線値 $G(y, y)$ の最大値として得られた。この問題については、 $M=2$ とした棒のたわみ問題について具体的なケースを詳しく調べた（雑誌論文⑦、⑧）。取り扱う微分方程式は単純型2点境界値問題の4階常微分方程式であるが、片側の境界条件を固定端、ディリクレ端、ノイマン端、自由端の4種類とした。対称性を考慮して10種類の境界条件に対して、ソボレフ不等式の最良評価を丁寧に求めた。ディリクレ端自由端、両端ノイマン型、ノイマン端自由端、両端自由端の4つの場合には、固有値0をもつため可解条件と直交条件を付加して、対称性と直交性をもつグリーン関数がただ一つに求まるよう対称直交化法を用いて構成した。また低階項がある場合については、 n 階フルヴィッツタイプ微分作用素に対応したソボレフ型不等式の最良評価を得た（雑誌論文①）。この結果は、ヘビサイド・トムソンケーブルの時間周期境界値問題に対応するソボレフ型不等式の最良定数およびそれを達成する最良関数を求めたことに該当する。その物理的意味は、交流電流である出力電圧の絶対値の最大値の2乗を入力電圧のパワーで上から評価する評価式となっている。最良定数はグリーン関数の L^2 ノルムの2乗に等しく、最良定数と最良関数はいずれも固有値を用いて表現できる。特に、1次元ユークリッド空間上におけるソボレフ不等式の最良定数は、有限群の表現で重要な役割を果たすギャンベリの公式を用いて固有値の有理式で表すことができた（雑誌論文⑤）。さら

に、取り扱った高階フルヴィッツ型微分作用素を偏微分作用素に拡張したソボレフ型不等式の最良定数を得た(雑誌論文③)。具体的には、高階フルヴィッツ型偏微分作用素に対して周期1の n 次元トーラス上での境界値問題を考え、対応するグリーン関数を楕円データ関数を用いて求めた。解の公式にシュヴァルツの不等式を適用することによりソボレフ型不等式を得ることができ、その最良定数はグリーン関数の L^2 ノルムを用いて表すことができた。本研究成果は、研究実績であるヘビサイド・トムソンケーブルの時間周期境界値問題に対応するソボレフ型不等式の偏微分作用素への拡張に対応している。

連続版のソボレフ不等式の最良評価と並行して進めてきた離散版のソボレフ不等式においては、離散版マイナスラプラスアンを正多面体(正四面体, 正六面体, 正八面体, 正十二面体, 正二十面体)上に導入して、それぞれに対応するソボレフ不等式の最良定数を計算することができた(雑誌論文④)。いずれの場合も離散熱核を定義し、そのラプラス変換によりグリーン行列, 擬グリーン行列を計算する。このグリーン行列, 擬グリーン行列の対角成分の最大値が、連続の場合と同様、離散版ソボレフ不等式の最良定数となり(正多面体の場合は対称性によりどの対角成分も同じになる), 最良定数を達成するベクトルは、グリーン行列, 擬グリーン行列の各列ベクトルとなることが分かった。この他に、糸のたわみ問題に対する離散ソボレフ不等式の最良評価を得ることができた。その最良定数は第1種チェビシェフ多項式と第2種チェビシェフ多項式を用いて表すことができた(雑誌論文②)。こうした結果は今後の離散版ソボレフ不等式の研究を行う上での重要な足がかりとなる結果といえる。

以上の成果は関連の深い学会, 国際会議において発表を行った。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計8件)

- ① Kazuo Takemura, Yoshinori Kametaka, Kohtaro Watanabe, Atsushi Nagai and Hiroyuki Yamagishi, Sobolev type inequalities of time-periodic boundary value problems for Heaviside and Thomson Cables, *Boundary Value Problems*, 査読有, 2012/ 95, 2012, 10.1186/1687-2770-2012-95
- ② Hiroyuki Yamagishi, Atsushi Nagai, Kohtaro Watanabe, Kazuo Takemura and Yoshinori Kametaka, The Best Constant of Discrete Sobolev Inequality

Corresponding to a Bending Problem of a String, *Kumamoto Journal of Mathematics*, 査読有, 25 巻, 2012, pp. 1-15

- ③ Hiroyuki Yamagishi, Yoshinori Kametaka, Atsushi Nagai, Kohtaro Watanabe and Kazuo Takemura, Elliptic theta function and the best constants of Sobolev-type inequalities, *JSIAM Letters*, 査読有, 4 巻, 2012, pp. 1-4
- ④ 亀高惟倫, 渡辺宏太郎, 山岸弘幸, 永井敦, 武村一雄, 正多面体上の離散ソボレフ不等式の最良定数, *日本応用数理学会論文誌*, 査読有, 21 巻, 2011, pp. 289-308
- ⑤ Yoshinori Kametaka, Atsushi Nagai, Kohtaro Watanabe, Kazuo Takemura and Hiroyuki Yamagishi, Giambelli's formula and the best constant of Sobolev inequality in one dimensional Euclidean space, *Scientiae Mathematicae Japonicae*, 査読有, 71, No. 1, 2010, pp. 27-41
- ⑥ Kazuo Takemura, The best constant of Sobolev inequality corresponding to clamped-free boundary value problem for $(-1)^j(d/dx)^{2j}$, *Proceedings of the Japan Academy*, 査読有, 85, Ser. A, No. 8, 2009, pp. 112-117
- ⑦ Kazuo Takemura, Hiroyuki Yamagishi, Yoshinori Kametaka, Kohtaro Watanabe and Atsushi Nagai, The best constant of Sobolev inequality corresponding to a bending problem of a beam on an interval, *Tsukuba Journal of Mathematics*, 査読有, 33, No. 2, 2009, pp. 253-280
- ⑧ 山岸弘幸, 亀高惟倫, 武村一雄, 渡辺宏太郎, 永井敦, 弾性基盤上の張力をかけた棒のたわみの2点境界値問題と対応するソボレフ不等式の最良定数, *日本応用数理学会論文誌*, 査読有, 19, No. 4, 2009, pp. 489 - 518

[学会発表] (計9件)

- ① 亀高惟倫, カイラル型カーボンナノチューブ上の離散ソボレフ不等式の最良定数, 日本数学会, 2013年03月23日, 京都大学
- ② 亀高惟倫, 小さいフラーレンとカーボンナノチューブ上の離散ソボレフ不等式の最良定数, 日本数学会, 2012年09月19日, 九州大学
- ③ Kazuo Takemura, The best constant of Sobolev inequality for a discrete Laplacian on Mobius ladder, *INTERNATIONAL CONGRESS ON*

- MATHEMATICAL PHYSICS ICMP12, Aug 06, 2012, Denmark
- ④ Yoshinori Kametaka, The best constant of discrete Sobolev inequality on the smallest carbon nano tube, INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL PHYSICS ICMP12, Aug 06, 2012, Denmark
- ⑤ Kazuo Takemura, The best constant of a Sobolev-type inequality which corresponds to Heaviside and Thomson cable with periodic boundary condition, Equadiff 2011, August 2, 2011, Loughborough University, England
- ⑥ Yoshinori Kametaka, The Best constant of Sobolev-type inequality corresponding to higher-order heat operator, Equadiff 2011, August 2, 2011, Loughborough University, England
- ⑦ Kazuo Takemura, The best constant of Sobolev inequality corresponding to clamped-free boundary value problem for $(-1)^M(d/dx)^{2M}$, Czech-Japanese Seminar in Applied Mathematics 2010, September 2, 2010, Telc, Czech republic
- ⑧ Kazuo Takemura, Free boundary value problem for $(-1)^M(d/dx)^{2M}$ and the best constant of Sobolev inequality, 7th International ISAAC Congress, July 14, 2009, England
- ⑨ Yoshinori Kametaka, Hierarchical structure of Green function for a bending problem of a beam, International Conference on Differential Equations and Applications, May 7, 2009, Hanoi University of Technology, Vietnam

[図書] (計0件)

[産業財産権]

○出願状況 (計0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況 (計0件)

名称：

発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

[その他]
ホームページ等
特になし

6. 研究組織

(1) 研究代表者

武村 一雄 (TAKEMURA KAZUO)
日本大学・生産工学部・助教
研究者番号：60367216

(2) 研究分担者

亀高 惟倫 (KAMETAKA YOSHINORI)
大阪大学・基礎工学研究科・名誉教授
研究者番号：00047218

(3) 連携研究者

永井 敦 (NAGAI ATSUSHI)
日本大学・生産工学部・准教授
研究者番号：90304039