

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 6 月 4 日現在

機関番号：33919

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2011

課題番号：21540151

研究課題名（和文）無限次元ラプラス作用素の一般化と確率過程構成法および量子情報解析への展開

研究課題名（英文）Generalizations of infinite dimensional Laplacians, construction methods of stochastic processes and developments in quantum information analysis

研究代表者

齊藤 公明（SAITO KIMIAKI）

名城大学・理工学部・教授

研究者番号：90195983

研究成果の概要（和文）：本研究の目的は確率論、解析学、グラフ理論、数論、計算機科学のそれぞれの専門分野から総合的に応用に適した無限次元確率解析を共同研究し、その立場からの量子化法、更に量子情報解析として新しい展開をすることにあつた。特に2階微分の高階チェサロ和として定義されるエキゾチック・ラプラシアンに基づいた確率解析を基にホワイトノイズ高階微分理論の構築に成功し、この路線に沿った量子情報解析の展開が可能になったことは本課題の成果の大きな進展であり、独創的な意義のある点でもある。

研究成果の概要（英文）：In this research, we considered a quantization and a new approach to a quantum information analysis by researching the infinite dimensional stochastic analysis jointly from major fields: probability theory, analysis, graph theory, number theory and computer science. Especially we succeeded in constructing the theory of higher order derivatives of white noise based on the stochastic analysis associated with exotic Laplacians defined by higher order Cesàro means of the second differentiation. It is a quite important progress and a creative point that a quantum information analysis in this direction can be constructed.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
2011年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総計	2,600,000	780,000	3,380,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：無限次元ラプラス作用素、無限次元確率過程、確率過程構成法、量子情報解析、Exotic Laplacian、レヴィ・ラプラシアン一般化、ホワイトノイズの高階微分、チェサロヒルベルト空間

1. 研究開始当初の背景

代表者齊藤はホワイトノイズ汎関数上に働く無限次元ラプラシアンを基に一つの無限次元解析を研究し続けてきた。この分野は日本で創始され、主に名古屋の研究グループ、海外ではドイツ、米国を中心に研究されてき

た分野で、最近、量子確率論、分子生物学、経路積分法、情報理論、経済学等への応用の広さから、各界の研究者達から注目され、様々な方向に研究が展開され始め、アメリカ数学会の Mathematical Review から、60H40: White Noise Theory なる登録番号

を与えられ、国際的に一つの理論分野として認められるに至っていた。ゆらぎを含んだ現象をホワイトノイズの観点から連続無限独立変数の汎関数とみなして、超汎関数の空間を構成し、その空間の解析を行なうものである。いままで受けさせていただいた基盤研究の成果から本研究の基盤は出来上がりつつあったが、レヴィ・ラプラシアン的一般化やホワイトノイズの高階微分の汎関数理論の研究には繋がってはいなかった。また、そのような研究も他には存在していない状況であった。

2. 研究の目的

本研究の目的は、確率論、解析学、グラフ理論、数論、計算機科学のそれぞれの専門分野から総合的に応用に適した無限次元確率解析を共同研究し、その立場からの量子化法、さらに量子情報解析として新しいアプローチを展開することにあった。ホワイトノイズ微分が量子計算論に応用できることも分かり、その展開をも行なうことにした。特に、その微分に関するレヴィ・ラプラシアンは、作用素解析の中でも特異な存在であり、超汎関数の空間にのみ実質上働く作用素である。このラプラシアンに関する Laplace 方程式と Yang-Mills 方程式が等価であることもわかっており、このラプラシアンに基づいた無限次元解析を構築することにより、場の理論の別の記述ができるという特色がある。主なテーマは、この Yang-Mills 場のレヴィ・ラプラシアンに基づいた無限次元確率解析による研究であり、それは同時に無限次元確率過程の構成的研究に通じることでもある。具体的にレヴィ・ラプラシアンおよびその一般化（2階微分の高階チェサロ和として定義されるエキゾチック・ラプラシアン）を含む微分作用素によって生成される無限次元確率過程の構成的研究から、確率過程による量子化を通じ、量子情報解析を展開する。更に、エキゾチック・ラプラシアンに基づいた確率解析を基にホワイトノイズ理論において更に新しい展開を行なう。初年度からこのような目的で、本基盤研究を進めてきた。

3. 研究の方法

研究計画としては、以下に挙げる項目を中心に考えた。

- 1) 数学、物理、経済等関連分野のセミナーを開き、各界の研究者達との議論、共同研究を行なった。
- 2) 他大学、関連機関等の研究者にレビューとしての講演を依頼した。
- 3) 海外の研究者との共同研究。
- 4) 関連の研究集会への参加及び研究発表。
- 5) 計算機数式処理システムの充実と量子計算などの数理的実験。

基本的に各年度とも基本的な研究計画は同じものとし、年度が進むに連れて研究内容も収束してゆくように進めた。計算機、ソフトウェア等必要なものは、その後の研究に差し支えないよう早めに購入するようにした。

4. 研究成果

(1) エキゾチック・ラプラシアンとは2階変分の高次オーダーのチェサロ極限として定義される。レヴィ・ラプラシアンはオーダー1のエキゾチック・ラプラシアンである。エキゾチック・トレースに基づいてヒルベルト空間、核型空間を構成し、それらの空間上で、グロス・ラプラシアンとエキゾチック・ラプラシアンの相似性について議論した。エキゾチック・ラプラシアンは上記の空間の上ではエキゾチック・トレースに基づいた基底に関するグロス・ラプラシアンと一致し、その結果、エキゾチック・ラプラシアンにより生成される確率過程も、無限個の独立なブラウン運動を用いて構成できることを証明した。加えて、エキゾチック・ラプラシアンによるホワイトノイズ超汎関数空間の分解も試みた。本成果は 国際論文誌 Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics に掲載された。

(2) ガウス型ノイズとポアソン型ノイズの両者の結合したノイズを変数とする汎関数の空間上で、Lévy Laplacian の生成する確率場を構成した。更に、ガウス型汎関数空間とポアソン型汎関数空間の間に同型写像を導入し Lévy Laplacian と Beltrami Laplacian との関係、Lévy Laplacian の生成するユニタリ群と無限次元 Fourier-Mehler 変換との関係を与えた。本成果は 国際論文誌 Interdisciplinary Information Sciences に開催された。

(3) ホワイトノイズの高階微分の第二量子化作用素を用いてエキゾチック・ラプラシアンがホワイトノイズの高階微分に関するレヴィ・ラプラシアンの定数倍に一致することを証明した。この第二量子化作用素はホワイトノイズ超汎関数の空間からホワイトノイズ高階微分の超汎関数の空間への全単射かつ連続作用素となっている。これは エキゾチック・ラプラシアンがレヴィラプラシアン的一般化であることを示している。ホワイトノイズ高階微分の超汎関数の解析を展開する上で基盤となる成果である。本成果は 国際論文誌 Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics に掲載された。更に本成果は無限次元ブラウン運動の構成法に繋がり、超関数を基底にした無限次元ブラウン運動のある種の微分がエキゾチック・ラプラシアンによって

生成される超確率過程となるという結果を得た。本内容はイタリアで開催された国際会議にて発表し、国際論文誌 Quantum Probability and White Noise Analysis に掲載予定となった。ローマ第2大学アカルディ教授とは、本成果を基に共同研究として、ウィナーの一般調和解析に関連した量子ホワイトノイズ高階微分理論の展開を続けている。この路線に沿った量子情報解析の構築が可能になったことは本課題の成果の大きな進展であり、独創的な意義のある点でもある。

(4) 株価変動を表わす幾何ブラウン運動をホワイトノイズ汎関数と捉え、無利子リスクレートとボラティリティを変数に考えることにより、ベルトラミ、レヴィ、ヴォルテラの3つの無限次元ラプラシアンを用いて特徴付けを得ることに成功した。この特徴付け定理において、ホワイトノイズ汎関数をホワイトノイズの2乗の汎関数に変換する作用素が重要な役割を果たしている。本成果は国際論文誌 Random Operators and Stochastic Equations に掲載された。本成果における無限次元ラプラシアンによる特徴付けに関しても更なる一般化が完成し現在論文をまとめている。ファイナンスにおける新しい視点からの展開が可能になることが期待される。

(5) 移民を伴う G-W 分枝過程の定常分布の存在を具体的な形を決定し、証明することが出来た。本件は、本基盤研究で購入した計算機により得た新しいアルゴリズム及び計算機実験に基づいた予測が原点となった。本成果は国際論文誌 Communications on Stochastic Analysis に掲載された。現在より一般的な分枝過程について考察を続けている。

(6) 報酬を伴う Markov 連鎖というモデルで記述される政策に対する最適化法では、Markov 連鎖の各状態に対して、推移確率行列と報酬行列を構成するための代替的な組の集合が与えられていることを仮定する。十分に時間が経過した際に、各推移で得られた報酬に関する累積報酬の期待値を最大にするこれらの行列の組を構成することが目的となる。この問題に対する最適化法として、R. A. Howard の方法がよく知られていたが、この方法は、すべての政策が極限分布をもつという条件を仮定していた。この条件を満たさない周期的 Markov 連鎖による政策に対して、Howard の方法を拡張し、同様に扱うことを検討し、この方法を改良した。本成果は国際論文誌 Far East Journal of Mathematical Sciences に掲載された。

(7) 本研究で構築した無限次元確率解析を抽象ウィナー空間上に展開する研究をルイジアナ州立大学郭教授と共同で進めている。量子確率過程論においてもこの方向で新しい進展が期待される。

5. 主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計6件)

Y. Uchimura, K. Saitô: "Improvement of Howard's policy iteration method for application to policies modeled by periodic Markov chains", Far East Journal of Mathematical Sciences, 査読有, Vol. 57, 2011, pp.113-132.

Y. Uchimura, K. Saitô: "Stationary Distributions of the Bernoulli Type Galton-Watson Branching Process with Immigration", Communications on Stochastic Analysis, 査読有, Vol. 5, No. 3, 2011, pp.457-480.

I. Kitagawa, K. Saitô, A.H.Tsoi: "A characterization of the geometric Brownian motion in terms of infinite dimensional Laplacians", Random Operators and Stochastic Equations, 査読有, Vol. 19, 2011, pp.91-103.

L. Accardi, U. C. Ji, K. Saitô: "Exotic Laplacians and derivatives of white noise", Infinite Dim. Anal., Quantum Prob. and Related Topics, 査読有, Vol.14, 2011, pp.1-14.

K. Saitô: "A Gauss-Poisson correspondence and the Lévy Laplacian," Interdisciplinary Information Sciences, 査読有, Vol.15, No.3, 2009, pp. 431-440.

L. Accardi, U.C.Ji and K. Saitô: "Exotic Laplacians and associated stochastic processes," Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, 査読有, Vol.12, No.1, 2009, pp. 1-19.

[学会発表](計8件)

K.Saitô: "「Infinite dimensional Laplacians associated with derivatives of white noise」, 32nd International Conference on Quantum Probability and Related Topics, May 29 - June 4, Levico Terme - Italy, Invited Talk (2011 月 5 月 30

日)

K. Saitô: 「 Infinite dimensional Laplacians associated with derivatives of an infinite dimensional Brownian Motion」, Chungbuk National University, Korea, Invited Lecture (2011年3月19日)

K. Saitô: 「 Higher order derivatives of white noise and infinite dimensional Laplacians」, 研究集会「ウィナーカオスとその周辺」愛知教育大学 (2010年12月27日)

K. Saitô: 「 Exotic Laplacians and higher order derivatives of white noise」, The 10th Sendai Workshop on Infinite Dimensional Analysis and Quantum Probability, Graduate School of Information Sciences, Tohoku University (2010年12月17日) p. 25-2.

K. Saitô: 「 A Gauss - Poisson correspondence and Laplace operators」, 第10回チュニジア - 日本 文化・科学・技術学術会議 TJASST10 (2009年11月12日), Tunisia..

K. Saitô: 「 Exotic Laplacians in White Noise Theory」, Invited Lecture at University of Tunis El Manar-Tunisia (2009年11月11日), Tunisia.

K. Saitô: 「 Exotic Laplacians and higher derivatives of white noise」, 大学間共同研究 Volterra Center, University of Rome Torvergata, (2009年9月4日), Rome, Italy.

K. Saitô: 「 Exotic Laplacians and exponential functions of white noise」, 科研費研究集会「白色雑音とアルゴリズムに関する確率論」, 福岡教育大学, アブストラクト No. 10 (2009年9月1日)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

齊藤 公明 (SAITO KIMIAKI)
名城大学・理工学部・教授
研究者番号: 90195983

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

松澤 忠人 (MATSUZAWA TADATO)

名城大学・理工学部・教授

研究者番号: 20022618

市原 完治 (ICHIHARA KANJI)

名城大学・理工学部・教授

研究者番号: 00112293

三町(原) 祐子 (MIMACHI HARA YUKO)

名城大学・理工学部・准教授

研究者番号: 00218629

西 健次郎 (NISHI KENJIRO)

名城大学・理工学部・講師

研究者番号: 30076616

尾畑 伸明 (OBATA NOBUAKI)

東北大学大学院・情報科学研究科・教授

研究者番号: 10169360

日比野 雄嗣 (HIBINO YUJI)

佐賀大学・理工学部・准教授

研究者番号: 50253589