

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 4 月 19 日現在

機関番号：34310  
 研究種目：基盤研究（C）  
 研究期間：2009～2011  
 課題番号：21540153  
 研究課題名（和文）常微分方程式に対する“先読み”線型多段階法の構築  
 研究課題名（英文）Construction of “look-ahead” linear multistep methods for ODEs  
 研究代表者  
 三井 斌友（MITSUI TAKETOMO）  
 同志社大学・理工学部・教授  
 研究者番号：50027380

研究成果の概要（和文）：常微分方程式初期値問題に対する離散変数法として“先読み”線型多段階法を提案し、その特性を解析するとともに、2段階であるスキームを具体的に導出し、その収束性・安定性を数値実験によって確認して、従来の離散変数法と比肩できることを導いた。

研究成果の概要（英文）：We proposed “look-ahead” linear multistep methods as a new type of discrete variable method of initial-value problems of ordinary differential equations by analyzing their numerical properties, and derived several “look-ahead” linear two-step methods, whose convergence and stability are confirmed through numerical experiments. Thus the new method is promising to be competitive with the conventional methods.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2010年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2011年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般

キーワード：数値数学，微分方程式

1. 研究開始当初の背景

数多くの数理モデルは、常微分方程式の初期値問題として定式化されるため、その適用範囲は広く、その数値解法は数値解析における重要な課題である。独立変数を離散化し、そのステップ点での解の近似値を構成的に求めるスキームを与える離散変数法は、Runge-Kutta 法などの一段階法や、Adams 法や BDF などの線型多段階法に大別されるが、それぞれに歴史も長く、多くの提案、解析結果、経験が蓄積されていて、原理的に新しいタイプの方法はないのではないかと考えられてきた。本研究はこの状況に一石を

投じようと計画された。

上に述べたクラス以外の試みは全くなかったわけではなく、我が国では 1970 年代の占部実の研究などを指摘することができるが、いずれにせよ系統的ではなく、本研究で“先読み”線型多段階法（LALMM）と呼ぶ、新たなクラスの方法の一般論から構築する必要に迫られていた。

2. 研究の目的

離散変数法の一般性・柔軟性を生かしながら、スキームに含まれる段階数あるいは関数値計算の回数としての計算量を増やすことな

く、収束性と安定性において優れた方法を導入することを第一の目的とし、この観点で LALMM の枠組みと、その特性を解析する理論を構築する。さらに可能なかぎり LALMM に基づくスキームをソフトウェア化することも目的とした。

### 3. 研究の方法

LALMM は、求めたいステップ点より一つ先のステップ点（先読みステップ点）の近似値を含む線型多段階法と、先読みステップ点の函数値計算を含む別の線型多段階法を、それぞれ予測子と修正子とする「予測子・修正子反復」のスキームで、1 ステップの前進を行う。そのような新しいタイプの離散変数法については、数値解析の常道にしたがって、次の点を明らかにしなければならない。

- (1) 収束性解析と収束次数の導出
- (2) 安定性解析
- (3) 局所誤差の振舞いの事後評価
- (4) ステップ幅の自動調整機構
- (5) 多くの数値実験を重ねながらのソフトウェア化

これらの諸点を明らかにすることを研究の方法として、本研究を推進した。

### 4. 研究成果

LALMM に関して掲げた研究目標について、次の研究成果を収めた。

- (1) LALMM 一般の収束性に関して十分条件を導いた。すなわち、修正子方程式が  $q$  次を達成していれば、予測子が  $q-1$  次であっても、 $q$  次収束性を実現できる。
- (2) LALMM 一般の線型安定性については、予測子・修正子にそれぞれ随伴する各 2 種類の特性多項式を定義し、安定性はそれら多項式から導かれる安定性多項式の根の分布として特徴付けることができる。ただし、この安定性多項式は線型多段階法とはことなり、パラメータ  $z$  に関する 2 次式となるため、根分布に関する陽な表現は困難である。
- (3) 2 段階に焦点をしばった、“先読み”線型 2 段階法 (LALTM) について、収束次数が 4 であるスキームを 4 種類導出し、それらに対する数値実験を通じて、数値的にも 4 次を達成することを確認し、既存の Runge-Kutta 法や Adams 型 PC 法との対比を実行した。
- (4) さらに LALTM のうち、一つのスキームについては  $A$  安定性を、他の 3 つについても  $A(\theta)$  安定性を達成することを証明し、この観点でも優れていることを示した。
- (5) LALMM のこうした解析結果を背景として、数値解法が困難であることが知られている二体問題の Kepler 方程式（根何

度を示すパラメータを 1 個含んでいる）に対して数値実験を行い、従来法に比べて数十倍の高速性を達成することを確認した。

### 5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 3 件）

1. S. Nakamura, T. Mitsui, A pre-fetched BiCGSTAB method in the solution of the trapezoidal rule of large ODEs, Far East Journal of Applied Mathematics, 査読有、36 巻, 2009, 1 – 24
2. T. Mitsui, “Look-ahead” linear multistep methods for ordinary differential equations --- Introduction of the method ---, 同志社大学理工学研究報告, 査読有, 51 巻, 2010, 181 – 190
3. T. Mitsui, D. Yakubu, Two-step family of “look-ahead” linear multistep methods for ODEs,, 同志社大学理工学研究報告, 査読有, 52 巻, 2011, 181 -- 188

〔学会発表〕（計 8 件）

1. N. Esaki, T. Mitsui et al., Numerical modeling for growth of lawn grasses and its computational solution, 2009 International Conference on Scientific Computation and Differential Equations (SciCADE09), 2009 年 5 月 29 日, 北京, 中国
2. T. Mitsui, D. Yakubu, “Look-ahead” linear multistep methods, 12th Seminar on Numerical Solution of Differential and Differential-Algebraic Equations, 2009 年 9 月 15 日, Univ. of Halle, Halle, Germany
3. 江崎信行・三井斌友・小藤俊幸, 芝草の成長過程を表わす logistic 方程式とその数値解, 日本応用数学会 2009 年度年会, 2009 年 9 月 28 日, 大阪大学豊中キャンパス
4. T. Mitsui, D. Yakubu, Two-step family of “look-ahead” linear multistep methods for ODEs, 日本応用数学会 2010 年度年会, 2010 年 9 月 6 日, 明治大学駿河台校舎
5. T. Mitsui, D. Yakubu, Two-step family of “look-ahead” linear multistep methods for ODEs, Eighth International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM2010), 2010 年 9 月 20 日, Rhodes Palace Hotel, Rhodes, Greece
6. 江崎信行・三井斌友, スポーツ利用による損傷を考慮した芝生の成長モデル, 日本応用数学会 2011 年度年会講, 2011 年 9 月 15 日, 同志社大学今出川キャンパス.
7. T. Mitsui, D. Yakubu, 常微分方程式に対す

る“先読み”線型 2 段階法の族, 応用数学合同  
研究集会 (日本数学会応用数学分科会主催),  
2011 年 12 月 16 日, 龍谷大学瀬田キャンパ  
ス

8. T. Mitsui, D. Yakubu, Two-step Family of  
“Look-ahead” Linear Multistep Method  
for ODEs, 5th International Conference on  
High Performance Scientific Computing,  
2012 年 3 月 6 日, Hanoi 理工科大学, Hanoi,  
Vietnam

6. 研究組織

(1) 研究代表者

三井 斌友 (MITSUI TAKETOMO)

同志社大学・理工学部・教授

研究者番号 : 50027380

(3) 連携研究者

江崎 信行 (ESAKI NOBUYUKI)

豊田工業高等専門学校・准教授

研究者番号 : 80311033