

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年 6月 2日現在

機関番号：35302

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2011

課題番号：21540156

研究課題名（和文） 非優対角行列を含む行列方程式に対するハイブリット反復法を
目指しての総合研究研究課題名（英文） General research which aims at the hybrid iteration method for
a matrix equation including a non-diagonal dominant matrix

研究代表者

仁木 滉 (NIKI HIROSHI)

岡山理科大学・名誉教授

研究者番号：30068879

研究成果の概要（和文）：定常反復法である Gauss-Seidel 法に対する新たな効果的な前処理行列の提案と比較定理の導出を行った。前処理行列は係数行列の一部の要素を用いており、2つの前処理を組み合わせた効果的な手法について考察を行った。定常反復法のハイブリット法として SOR-like 法を BiCG-Stab 法の前処理として利用する方法を提案した。係数行列の対角に零要素を持つ場合と持たない場合に対する最適なパラメータを多くの数値実験から導いた。

研究成果の概要（英文）：We have proposed new effective preconditioner for the regular iterative method and proved the comparison theorem of its method. The preconditioned matrix uses some elements of the coefficient matrix, and we studied the effective technique of having combined two pretreatments. Furthermore, we proposed the SOR-like method as a preconditioner of the krylov subspace method. We showed the numerical results of SOR-like-CGS and SOR-like-BiCGStab.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,100,000	930,000	4,030,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：前処理法，定常反復法，クリロフ部分空間法

1. 研究開始当初の背景

(1) 差分法及び有限要素法で生成される対角優位な sparse 行列をもつ線型方程式に対する解法として，SOR 法を代表する定常反復法と CG 法のクリロフ部分空間法が適用できる。問題は比較的解きやすい問題であり，クリロフ部分空間法に分類される多くの解法のいずれかを利用することで，解くことができる。ただし，最適な解法と前処理の設定については多くの課題が残されている。

(2) 境界要素法などで生成される非対角優位で非対称な dense 行列をもつ問題に対しては，最適な解法を決定することは困難である。定常反復法は収束定理が示されていないが，場合によって収束することがあることが知られている。クリロフ部分空間法についても適切な方法は決定できない状況である。

(3) その他の非対称かつ非対角優位行列に対しては，問題によって，解ける場合と解けない場合があり，安定して解ける方法は提案

されていない。

2. 研究の目的

(1) 定常反復法は対角優位な問題に対して収束定理が既知であり、対角優位の度合いが高ければ、少ない反復回数で収束することも固有値の関係から明らかである。そこで、与えられた問題の行列に対して、適切な前処理を行うことで、対角優位度を高くしたり、非優対角行列を優対角化したりすることで、効果的な前処理付反復法の導出が可能となる。行列の対角優位の度合いを良くすることができる前処理行列を求めることを研究の目的とする。

(2) 定常反復法に比べて、クリロフ部分空間法と呼ばれる非定常反復法は収束する場合はより早く収束することが知られている。また非定常反復法の多くはその収束過程で見られる残差ベクトルのノルムが不規則であり、反復の途中にて収束するかどうか不明である。これらの理由から非定常反復法に対して、定常反復法を組み合わせることで、安定し高速な解法が得られると考える。そこで、定常反復法と非定常反復法のハイブリッド法の開発を目的とする。

3. 研究の方法

各年度の研究方法は次の通りである。

(1) 1年目(平成21年度)

- ① 既存の前処理行列に対する詳しい分析を行い、前処理行列を組み合わせることで得られるより効果的な前処理について議論を行う。
- ② 超大型行列へ適用可能な前処理行列の開発について検討を行う。
- ③ CG系列の前処理として、係数行列の一部を用いた方法について検討をする。
- ④ 具体的な適用問題として、海水の汚染物質の拡散問題を扱うシミュレーションについての数値実験を行う。

(2) 2年目(平成22年度)

- ① 係数行列の上三角と最下行要素を用いた前処理の開発と数学的妥当性の証明を行う。
- ② 非対称密行列に対する前処理の効果についての検証を行う。
- ③ 係数行列の一部を用いた前処理を適用したCG法の数値実験による比較を行う。
- ④ 非定常反復法と組み合わせる反復法としてSOR-like法の数値的検証を行う。

(3) 3年目(平成23年度)

- ① 移流拡散問題に対してのハイブリッ

ド法の数値実験を行う。

- ② MatrixMarketを利用した数値実験を行う。
- ③ SOR-like反復行列を構成する要素を前処理した場合の数値的検証を行う。
- ④ BiCGStab法に対してSOR-like法を前処理として利用したハイブリッド法の検証を行う。

4. 研究成果

(1) 前処理行列の効果と比較定理について前処理の組み合わせとして、効率的な手法について研究を行った。使用した基本的な前処理の説明を表1に示す。

表1 基本前処理の説明

記号	備考
Ps	上双対角要素で構成
Pm	上対角要素の各行で絶対値最大の要素で構成
Pc	1列目の要素で構成
Pr	最下行の前処理

表1に示した前処理を組み合わせる方法には2通りあり、同時に利用して前処理行列を構成する方法と一つの前処理を行った後に、さらに前処理を行う方法である。前者を+で表記し、後者をその順序で→で表記する。H-matrixのテスト行列に対する前処理効果の比較を表2に示す。前処理効果としては、前処理を行わないGauss-Seidel反復行列のスペクトル半径と比較して、平均的に減少した割合を表示しており、より小となった場合は効果的であるといえる。

表2 前処理の比較と最適SOR法

前処理パターン	効果(最小値)
Ps	75% (61%)
Pm	75% (69%)
Pc	84% (77%)
Pr	79% (63%)
Ps+Pm	54% (30%)
Ps→Pm	48% (25%)
Pc→Ps	53% (35%)
Ps→Pc	56% (44%)
Ps+Pr	55% (30%)
最適SOR法	62% (49%)

表2に示したように、Psを行った後にPmを適用した場合、スペクトル半径が最小となる結果が得られた。SOR法以外はいずれも反復法としてGauss-Seidel法を用いた結果である。全体的にシンプルなアルゴリズムであるが、最適なSOR法よりも優れていることを数値実験で示した。この結果は、論文で示され

たテスト行列を参考に得られた結果であり、おおまかな目安である。

具体的な問題として、移流拡散問題に対して行った結果も同様であり、 $P_s \rightarrow P_m$ の方法が最良の結果となった。研究成果として雑誌論文の①③④⑤⑥、学会発表として、①で行った。

(2) SOR-like 法を元にしたハイブリット法について

非優対角行列に対して SOR 法などのこれまでの手法は適用できない。そこで、SOR-like 法に着目し研究を行った。SOR-like 法は非優対角問題においても対角に零要素を持つ問題に対してさらに効果をもつ方法である。対角の要素を補完する形で SOR-like 法は構成され、その補完のためのパラメータ行列と、もともとの SOR 法のパラメータの2つを決定する必要がある。本研究では係数行列の各行の対角優位性を利用し、対角分離要素を決定し、さらに対角に零要素を含む場合には 0.02 と含まない場合は 0.45 を用いることで、ほぼ最適なパラメータであることを数値実験から導出した。テスト行列として Matrix Market を利用した結果を表 3 に示す。扱った問題は 300 種類程度であるが、行列の次数が 500 未満とそれ以上の行列に分けて、反復計算全体にかかった CPU 時間を前処理なしの CGS 法を 1 として比較した結果を示した。前処理として ILU(0)法と SOR-like 法を用いた結果である。

表 3 CGS 法に対する前処理の効果

規模	ILU(0)-CGS	SORlike-CGS
500 未満	0.42	0.61
500 以上	0.54	0.49

500 未満の問題に対しては、一般に使われている ILU(0) 前処理が効果的であるが、次数が増えた場合は、演算量が増加していることがわかる。Matrix Market で利用した行列で最大は 1 万 7 千次元程度である。SOR-like 法は次数が大きくなった場合に効果的に働いている結果が得られた。図 4 に Fidap036 (次数 3079) に対する収束履歴を示す。横軸が反復回数で、縦軸が残差ノルムを対数表示したものである。FIDAP は有限要素法を離散化することで得られる問題を元に作られたテスト行列である。比較のために反復法として CGS 法と BiCGSTAB 法に対して ILU(0)と SOR-like の前処理を施した結果である。SOR-like 前処理法を用いた場合、反復回数が多くかかっているが、全体にかかった CPU 時間は減少している。

SOR-like 前処理を用いた Krylov 部分空間法をハイブリット法と定義し、数値実験を行ったが、Matrix Market で提供されている問

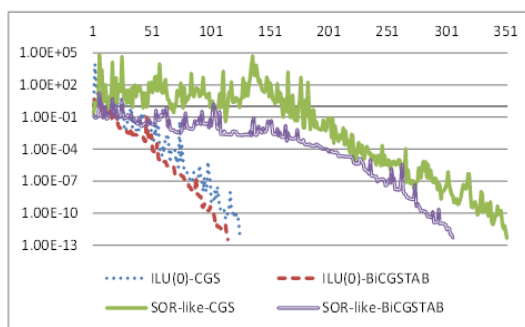


図 4 次数 3079 に対する収束履歴

題はその多くが非優対角行列であり、表 3 と図 4 に示したように効果的であることが示された。さらに、対角に零要素を持つ場合は、前処理なしの CGS 法が収束しない場合がある。そこで、ILU(0)前処理付 CGS 法に対する CPU 時間の比較結果を表 5 に示す。

表 5 対角零要素を持つ問題の比較

規模	SOR-like 前処理付	
	CGS 法	BiCGSTAB
500 未満	1.33	1.37
500 以上	0.57	0.73

同様に、500 以上の問題に対して計算時間が減少し、効果的であることが示された。

これらの結果を雑誌論文として②に一部触れており、学会発表として、②③④⑤で行った。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 8 件)

- ① 河野敏行, 新田敏弘, 仁木滉, Gauss-Seidel 反復法に対する前処理の組み合わせによる影響について, 日本応用数学会論文誌, 査読有, Vol. 20, No. 2, 2010, 131-145
- ② Toshiyuki Kohno, Toshihiro Nitta, Hiroshi Niki, On the preconditioned SOR-like algorithm, INFORMATION, 査読有, Vol. 13, No. 3(B), 2010, 871-876
- ③ Toshihiro Nitta, Toshiyuki Kohno, and Hiroshi Niki, On the GS iterative method with I+S type preconditioner, INFORMATION, 査読有, Vol. 13, No. 3(B), 2010, 857-861
- ④ Toshiyuki Kohno and Hiroshi Niki, A note on the preconditioner $P_m=(I+S_m)$, Journal of Computational and Applied Mathematics, 査読有, Vol. 225, No. 1, 2009, 316-319
- ⑤ Hiroshi Niki, Toshiyuki Kohno and

Kuniyoshi Abe, An extended GS method for dense linear system, Journal of Computational and Applied Mathematics, 査読有, Vol.231, No.1, 2009, 177-186

- ⑥ Masataka Usui, Hiroshi Niki and Toshiyuki Kohno, A classification of H-matrix, International Journal of Numerical Methods and Applications, 査読有, Vol.1, No.1, 2009, 53-62

[学会発表] (計 5件)

- ① 河野敏行, 新田敏弘, 仁木滉, 前処理付定常反復アルゴリズムの比較, 日本応用数理学会環瀬戸内応用数理研究部会, 2011年12月3日, 山口東京理科大学(山口)
- ② Toshiyuki Kohno, On the SOR-like preconditioner, Int. Workshop on application of iterative methods to engineering and its mathematical element, 2011年10月23日, 同志社大学(京都)
- ③ Toshihiro Nitta, Toshiyuki Kohno and Hiroshi Niki, The PSOR-like preconditioner for CGS method, Precond2011 (International Conference On Preconditioning Techniques For Scientific And Industrial Applications), 2011年5月18日, ボルドー第1大学(フランス)
- ④ Toshiyuki Kohno, Toshihiro Nitta and Hiroshi Niki, On the SOR-like method as preconditioner of CGS, International congress on Computational and Applied Mathematics, 2010年7月6日, ルーバンカトリック大学(ベルギー)
- ⑤ Toshiyuki Kohno, Toshihiro Nitta and Hiroshi Niki, On the preconditioned SOR-like algorithm, The Fifth International Conference on Information, 2009年11月6-9日, 京都大学(京都)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

仁木 滉 (NIKI HIROSHI)
岡山理科大学・名誉教授
研究者番号: 30068879

(2) 研究分担者

春木 茂 (HARUKI SHIGERU)
岡山理科大学・理学部・教授
研究者番号: 60140480
濱谷 義弘 (HAMAYA YOSHIHIRO)
岡山理科大学・総合情報学部・教授
研究者番号: 40228549

河野 敏行 (KOHNO TOSHIYUKI)
岡山理科大学・総合情報学部・准教授
研究者番号: 90309534
仁木 将人 (NIKI MASATO)
東海大学・海洋学部・准教授
研究者番号: 30408033