様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成２４年　５月　２５日現在

機関番号：１１４０１
研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2009 ～ 2011
課題番号：21540160
研究課題名（和文）　時間変化を許した領域形状の非線形推定とそのアルゴリズムの研究
研究課題名（英文）　Research on estimation of the shape of unknown portions of a domain varying with time and on algorithms for reconstruction of the shape

研究代表者
河上　肇　（KAWAKAMI HAJIME）
秋田大学・大学院工学資源学研究科・准教授
研究者番号：20240781

研究成果の概要（和文）：本研究では「ある物体の表面の一部の形状が未知であったり，あるいは内部に形状が未知の空洞がある場合に，その未知形状を，表面の一部において計測した温度データから推定する問題」を考察の対象とした．ただし，その未知形状は時間の経過に伴って変形しても構わないものとする．この考察においては第一に，温度データから未知形状を一意に定めることが出来るか否かが問題となる．本研究では，未知形状を一意に定めることができるための条件を，数学的に厳密な形で示した．

研究成果の概要（英文）：When the shape of a portion of the face of an object or the shape of several internal cavities of an object is unknown, the shape may be estimated by using thermal data from measurements on an accessible portion of the face. In this research, we studied such an inverse problem for the shape which may vary with time. Then we focused on the unique determination problem: whether the unknown shape can be uniquely determined from the thermal data or not. Solving the unique determination problem is firstly requested for the inverse problem. We demonstrated some sufficient conditions for the unique determination.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2009 年度	500,000	150,000	650,000
2010 年度	500,000	150,000	650,000
2011 年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総　計	1,500,000	450,000	1,950,000

研究分野：放物型方程式に係わる逆問題
科研費の分科・細目：数学・基礎解析学
キーワード：逆問題，形状推定，放物型方程式，混合型境界条件

１．研究開始当初の背景

本研究では，熱方程式（さらには一般の 2 階放物型方程式）に係わる逆問題のひとつである「領域形状の推定問題」を考察した．ここで考える「領域形状の推定問題」とは，多次元ユークリッド空間の中の領域の境界の観測不能な部分の形状が未知であるとき，その形状を観測可能な境界の一部分で得られる温度に係わるデータから推定する問題である．これは，物体の内部の空洞や内壁の形状およびその変化，あるいは外部環境との境界部分の形状およびその変化の推定等の現実の問題に由来する．理論的考察において，推定のためのデータとしては，この領域におけ

る熱方程式（または 2 階放物型方程式）の初期値・境界値問題の解の観測可能な境界の部分におけるディリクレ境界値あるいはノイマン境界値が主として採用される．そして形状の一意同定性や安定性（形状のデータ依存性の評価）を示すこと，形状推定のアルゴリズムを与えること，およびその収束性を示すこと等が，解決すべき基本的な問題と考えられている．

研究開始当初においては，先行・関連研究として，

[BC1] K. Bryan and L. F. Caudill Jr., Electronic J. Diff. Eqns., C 01 (1997) pp. 23-29
[BC2] K. Bryan and L. F. Caudill Jr., Inverse Problems, 14 (1998) pp. 1429-1453
[CaRV] B. Canuto, E. Rosset and S. Vessella, Trans. A. M. S., 354(2) (2001) pp. 491-535
[BC3] K. Bryan and L. Caudill, Inverse Problems, 21 (2005) pp. 239-255
[CrRV] M. D. Cristo, L. Rondi and S. Vessella, Annali di Matematica Pura ed Appl., 185(2) (2006) pp. 223-255
[V] S. Vessella, Inverse Problems, 24 (2008) pp. 1-81

などがあった．[V] 以外はすべて領域が時間的な変化をしない場合を扱っている．またいずれも扱っている領域はリプシッツ連続性より強い正則性（$C^{1,1}$ 級，区分的 C^2 級など）を課している．[CrRV]，[V] は境界条件としてディリクレ境界条件を課し，推定に用いるデータとして解のノイマン境界値を用いている．それ以外の研究では，境界条件としてノイマン境界条件を課し，推定に用いるデータとして解のディリクレ境界値を用いている．[BC1] は形状の一意同定性を示し，[CaRV]，[CrRV] は安定性を調べている．[V] は領域が時刻に依存し変化することを許し，方程式が非線形の場合も含めて，かなり一般的な状況下での形状の一意同定性や安定性を得ている．[BC2] は直方体状の領域の下面が微小変形したときの，その変形面の形状の推定問題を考えて線形化した逆問題を扱っている．さらに [BC3] は形状推定のアルゴリズムを提案しているが，その収束性は示していない．

２．研究の目的

本研究は，「研究開始当初の背景」の項で述べた逆問題を以下の設定で取り扱うことを目的とした．現実の局面を想定すると，これらの設定はいずれも十分に考察の価値があるものと考えられるからである．

(a) 推定したい未知形状部分が時刻に依存して変化することを許す．
(b) 推定したい未知形状部分も含め，領域の正則性をできるだけ緩めた条件の下で考える．具体的には，リプシッツ領域を目標とする．
(c) 混合型境界条件を課す．すなわち，境界の未知形状部分では斉次ディリクレ境界条件を課し，境界の残りの部分では非斉次ノイマン境界条件（あるいはロバン境界条件）を課す．

研究代表者は，研究協力者の土谷正明氏（金沢大学名誉教授）並びに土谷氏の研究室の守山洋介氏と共同で，上記の設定 (a), (b), (c) の下で，リプシッツ領域を底面とする柱状領域の下面が未知の微小変形をしたときの線形化した逆問題を考察した（この研究は「研究開始当初の背景」の項の [BC2] の一般化である）．そして，一意同定性，安定性，推定アルゴリズムについて一定の解決を得て

[KMT] H. Kawakami, Y. Moriyama and M. Tsuchiya, Inverse Problems, 23 (2007) pp. 755-783

に公表した．この結果も踏まえ，線形化していない本来の問題に対し，以下を考察することを本研究の目的とした．

(Ⅰ) 上記の設定 (a), (b), (c) の下で，一意同定性を示すこと．
(Ⅱ) 一意同定性を示すことが出来たケース（[V] よりも領域の正則性に関する条件が弱いケース）に対し，[V] で考察している安定性に関する量的な評価と同様の評価を得ること．
(Ⅲ) 一意同定性を示すことが出来たケースに対し，観測データから未知形状部分を推定するアルゴリズムを設計し，その収束性を示すこと．アルゴリズムの設計においては，まず [BC3] の考えを参考にして行う．また [BC3] のアルゴリズムの基礎にある汎関数には確率制御理論に基づくアプローチも可能であると考えられるので，マルコフ連鎖近似によるアルゴリズムを定式化し，上述のアルゴリズムと比較検討する．

３．研究の方法

本研究は研究代表者の河上と研究協力者の土谷正明氏が共同して進めた．土谷氏は時空間の正則性の弱い非柱状領域における放物型方程式の初期値・境界値問題の弱解についての考察，並びに確率制御理論に基づくアルゴリズムに対するいくつかの提案な

どを行った．研究はメールによる随時の連絡および直接の会合での議論により，問題点の解決を計りながら密接に協力して進めた．また関連する分野も多いので，研究会への参加や文献を通しての研究情報の収集も行いながら研究を進めた．以上を行うにあたって，河上と土谷氏の出張旅費並びに文献の購入費に科学研究費を充てた．

４．研究成果

「研究の目的」の項の（I）に関して一定の結果を得て，

[KT] H. Kawakami and M. Tsuchiya, Inverse Problems, 26 (2010) 125007 (34 pp)

に公表した．その内容は以下の通りである．

領域 $D(t)$ を時刻 $t \in [0,\mathrm{T}]$ に依存して決まる n 次元 Euclid 空間 R^n 内の有界リプシッツ領域（$C^{0,1}$ 級領域）とする．$D(t)$ の境界の分割 $\partial D(t) = \Gamma_A \cup \Gamma_I$ を考える．ただし，Γ_A は形状が既知の部分で時刻に依存せず，$\Gamma_I = \Gamma_I(t)$ は形状が未知の部分でその形状は時刻とともにリプシッツ連続的に変動しているとする．すなわち，時空間 $R_t \times R_x^n$ の非柱状領域 $D := \cup_{t\in(0,T)} D(t)$ の境界の側面部分$\partial^* D := \overline{\partial D \cap \{(0,\mathrm{T}) \times R^n\}}$ が，空間変数についての rigid motion の下で，局所的に $(t,x') = (t, x_1, \ldots, x_{n-1})$ のリプシッツ関数のグラフで表わされるものとする．このとき，D の parabolic boundary $\partial_L D$ および bottom $\partial_B D$ はそれぞれ $\partial_L D = \partial^* D$ および $\partial_B D = D(0)$ となる．時間的変動をしない境界部分 $(0,\mathrm{T}) \times \Gamma_A$ を共通にもち，上述の性質をみたす時空間の非柱状リプシッツ領域 $D := \cup_{t\in(0,T)} D(t)$ の全体を Δ で表す．領域 $D \in \Delta$ に対し，変数係数 2 階線形放物型方程式 （熱方程式）

(e-1) $Pu := \partial u/\partial t - \nabla_x \cdot (A\nabla_x u + au) + b\cdot\nabla_x u + cu = 0$

に混合型境界条件を課した初期値・境界値問題（e-2）を考える：

$$
\begin{aligned}
&Pu(t,x) = 0 && \big((t,x) \in D\big),\\
&\partial u/\partial \mathrm{N}(t,x) + \sigma(t,x)u(t,x) = \varphi(t,x) && \big((t,x) \in (0,T)\times\Gamma_A\big),\\
&u(t,x) = 0 && \big((t,x) \in \Sigma_I\big),\\
&u(0,x) = h(x) && (x \in D(0)).
\end{aligned}
$$

ここで $\partial u/\partial \mathrm{N}$ は P に関する conormal derivative で，$\Sigma_I := \cup_{t\in(0,T)} \Gamma_I(t)$ とする．また，方程式や境界条件の係数およびソース項は (t,x) の関数，初期値は x の関数であり，さらに A は 行列値リプシッツ連続関数，a,b はベクトル値有界関数，c および σ は有界実数値関数，φ と h は実数値 L^2 関数である．

以上の設定の下で，考察の対象とする逆問題は，時間区間 $(0,\mathrm{T})$ 内の観測面 Γ_ω $(\subset \Gamma_A)$ における観測データ（弱解 u の境界値）から，$(0,\mathrm{T})$ 内の時空変形面 Σ_I の形状を同定するという問題である．[KT] ではこの形状同定の一意性について考察した．

一意同定性に関する先行結果としては，[BC1]，[V] 等がある．[BC1] は，時間的に変動しない領域を扱い，境界は区分的 C^2 級であるとしている．そして境界条件としては境界全体でノイマン条件あるいはロバン条件を課し，形状の一意同定性を示している．[V] では時間的に変動する領域を扱い，境界は $C^{1,1}$ 級であるとしている．そして境界条件としては境界全体でディリクレ条件を課し，形状についての安定性の評価を与えている．

後述の定理 1 の証明は，[BC1] での証明と同様に背理法を使って行ったが，領域が時刻に依存しない場合には起こらない困難な問題点（後述）が生じる．そのため，class Δ については一意同定性を示すに到らなかったが，その幾つかの subclass について示すことができた．

定義：$D_1, D_2 \in \Delta$ に対し，$C(t)$ を $D_1(t) \cap D_2(t)$ の連結成分で $\Gamma_\omega \subset \partial C(t)$ を満たすものとする．

$$\tau_0 := \inf\{t \geq 0 : D_1(t) \neq D_2(t)\}$$

と置く．時刻 $\tau_1 > \tau_0$ が存在して，時間区間 (τ_0, τ_1) において，R^n 内の compact set に関する Hausdorff 距離の意味で $\overline{C(t)}$ が連続であるとき，D_1 と D_2 は *comparable* であると言う．

定理１：$D_1, D_2 \in \Delta$ とし，D_1，D_2 上で初期値境界値問題（e-2）を考える．それぞれの弱解を u_1, u_2 で表す．そして次を仮定する．
(i) 各時刻 t において，(e-2) の境界値 $\varphi(t,\cdot)$ は恒等的には 0 でない．
(ii) D_1 と D_2 は comparable である．
(iii) $D_1(0) = D_2(0)$ であるか，または (e-2) の初期値 h は 0 である．

このとき，$(0,\mathrm{T}) \times \Gamma_\omega$ 上で $u_1 = u_2$ であれば，$D_1 = D_2$ である．

上記の定理で，条件（iii）を仮定しないと反例が構成出来ることが，[BC1] によって示されている．上記の定理の証明を [BC1] での証明と同様のアプローチで行う際，

[IY] O. Y. Imanuvilov and M. Yamamoto, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 39 (2003) pp. 227-74

によって得られた弱解についての一意接続

定理と，時空間における集合 $D_i-\bar{C}$（ここで $i=1,2$，$C:=\cup_{t\in(0,T)} C(t)$ である）上での斉次ディリクレ境界条件を持つ初期値・境界値問題の弱解の一意性を使うことが必要になる．ところが領域の時間変動を許した場合には，$D_i-\bar{C}$ の形状がきわめて複雑になるので，一般的な扱いは非常に難しい．実際，$D_i-\bar{C}$ の境界の中に時間軸に垂直な連結成分が無限個現れ得るので，境界値の設定および解の定義やその一意性の証明等において種々の困難な問題が生じる．そこで我々は条件（ii）を課し，この条件の下では，$D_i-\bar{C}$ での初期値・境界値問題の弱解の一意性を示すことができた．条件（ii）は技巧的な条件に見えるが，D_1, D_2 の変動による D_1 と D_2 の食い違いの生じ方が，当初は緩やかであることを意味している．そして，Δ の subclass Δ' で定理 1 の条件を満たすものの例が，以下の定理 2 で与えられる．

定理２：以下の（A），（B），（C），（D）のいずれかを満たす Δ の subclass Δ' においては，任意の $D_1, D_2 \in \Delta'$ が条件（ii）を満たす．従って，この Δ' においては一意同定性が成り立つ．なお，以下においては，$\widetilde{\Sigma_I} \coloneqq \cup_{t\in[0,T]} \Gamma_I(t)$ と置く．

(A) Δ' に属する各領域 D について，その変形面 $\widetilde{\Sigma_I}$ は 1 つのリプシッツ連続な形状関数 $x_n=S(t,x')$ で表示されている．
(B) Δ' に属する各領域 D について，$\Gamma_I(t)$ は時刻に依存しない．
(C) Δ' に属するすべての領域 D について初期形状 $D(0)$ は共通であり，かつ各領域 D についてその変形面 $\widetilde{\Sigma_I}$ は C^1 級である．
(D) Δ' に属する各領域 D について，その変形面 $\widetilde{\Sigma_I}$ は時空間内の多面体の表面の一部である．

次に「研究の目的」の項の（II）についてである．この研究は，当初［V］の方法を参考にすることを想定していた．［V］では，安定性の評価を得る際，その proposition 4.1.1 の証明において，上述の集合 $D_i-\bar{C}$ に相当する時空間内の集合（以下 W）の上で解析を行っている（例えば divergence 定理の適用など）．ただし，定理 1（ii）に該当する条件を課していない．そのため，領域 D の時間変動を許す場合には，たとえ D が C^∞ 領域であったとしても，W は一般に Caccioppoli set（locally finite perimeter を持った set）になる保証がなく，実際に Caccioppoli set にならない例が構成できる．この例の構成に関しては［KT］に記載した．（定理 2（C）は D が C^1 級であれば定理 1（ii）が満たされることを主張している．このことは，D が C^∞ 領域であったとしても W は一般に Caccioppoli set にならない，という上記の主張と矛盾しない．前者は D_1, D_2 が C^1 級のとき，お互いの変動による食い違いが生じた直後は食い違いの変化の仕方が緩やかであることを意味しているのであり，時間大域的に緩やかな変化をしていることは意味しない．定理 1，定理 2 のためには，食い違いが生じた直後の緩やかさのみが必要であるが，［V］ proposition 4.1.1 の証明においては，W の時間大域的な形が問題となる.） 少なくとも Caccioppoli set に対しては divergence 定理の適用が許されるが，そうでないような複雑な集合 W 上で，いつ divergence 定理の適用などが許されるかが研究代表者と研究協力者には不明であったため，その解明を試みた（これが肯定的に示されれば，定理 1，定理 2 の改良も期待される）．しかし，その解明には至らず，安定性に関する結果を得ることは出来なかった．

次に「研究の目的」の項の（III）についてである．これについては，主に確率制御理論の応用を試みたが，実効的なアルゴリズムを得るには至らなかった．具体的には，

［KD］H. J. Kushner and P. Dupuis, Numerical Methods for Stochastic Control Problems in Continuous Time, 2nd ed., Springer, 2001

によって得られたアルゴリズムの応用を試みた．勿論［KD］のアルゴリズムも iteration を用いるものであるが，その特徴は，適切な条件下で iteration が大域的な最適解に収束することにある．これは推移確率からなるコスト関数の推移行列が縮小写像になることに由来する．本研究における逆問題の［KD］のアルゴリズムの枠組への翻訳として最も自然だと思われるのは，以下のようなものであろう．逆問題を考える領域は，［KMT］と同様の直方体状の空間領域の下面が未知の変形をしたものとし，その未知境界の形状をコントロールとする．
そして，放物型方程式（e-1）に対応する拡散過程を考える．このとき上記のコントロールはこの拡散過程に組み込まれ，制御拡散過程となる．コスト関数は，この制御拡散過程から定まる拡散方程式の解の観測面での値と，観測値との差の L^2 ノルムとする．これは局所時間を用いて表される．しかし，このような直接的な翻訳を行った場合，推移確率からなるコスト関数の推移行列が縮小写像になることが一般には保証されない．従って何らかの工夫が必要となるが，同時にそれは実効的な計算量に収まるアルゴリズムを導くものでなければならない．残念

ながら，本研究においてはそのような工夫を得ることが出来なかった．そのため，確率制御理論を応用したアルゴリズムを作成するという方針を 2011 年中に変更し，本報告を作成している 2012 年 5 月現在は，Feynman-Kac 型公式を利用したアルゴリズムを作成中である．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１件）
① Hajime Kawakami and Masaaki Tsuchiya, Uniqueness in shape identification of a time-varying domain and related parabolic equations on non-cylindrical domains, Inverse Problems, 査読有, vol. 26 (125007), 2011, 34 pages

〔学会発表〕（計２件）
① 河上　肇・土谷　正明，温度データによる､時間的に変動する領域の境界形状の同定の一意性について，研究集会「偏微分方程式の逆問題解析とその周辺分野に関する研究」，２０１０年６月２２日，京都大学数理解析研究所
② 河上　肇・土谷　正明，時間的変動を許した領域の形状の温度データによる同定問題の一意性について，日本数学会 ２２０１０年度年会，２０１０年３月２６日，慶応義塾大学

６．研究組織
(1)研究代表者
河上　肇　（KAWAKAMI HAJIME）
秋田大学・大学院工学資源学研究科・准教授
研究者番号： 20240781

(2)研究分担者
（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
（　　）

研究者番号：

(4)研究協力者
土谷　正明　(MASAAKI TSUCHIYA)
金沢大学・名誉教授
研究者番号：無