

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成25年 5月 20日現在

機関番号：12301

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2012

課題番号：21540162

研究課題名（和文） 偏微分方程式に対する逆問題の探針法および囲い込み法による研究

研究課題名（英文） Study on inverse problems for partial differential equations using the probe and enclosure methods

研究代表者

池島 優（IKEHATA MASARU）

群馬大学・大学院工学研究科・教授

研究者番号：90202910

研究成果の概要（和文）：3次元における熱方程式，波動方程式および粘弾性体の方程式系等を支配方程式とする逆問題において，有限観測時間にわたって得られた観測データを用いた囲い込み法がさまざまな形で展開出来ることが分かった．また今後の解決すべき問題を発掘出来たのも大きな副産物である．さらに Helmholtz 方程式を支配方程式とする固定波数における波の物体散乱の逆問題においては，囲い込み法の指示函数の対数微分を用いるというアイデアを見出し，その結果従来よりも2倍もの情報が得られることを示したことは特筆に値する．

研究成果の概要（英文）：The most representative results obtained in this study consists of two parts. The first one shows that the enclosure method using dynamical data over a finite time interval can be applied to several inverse problems for the heat and wave equations and visco-elastic system of equations in three dimensions. And also the result raises several problems to be solved. The second one is the finding of the idea that the logarithmic differential of the indicator function in the enclosure method applied to inverse obstacle scattering problems governed by the Helmholtz equation yields information two times more than the original indicator function.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	900,000	270,000	1,170,000
2010年度	800,000	240,000	1,040,000
2011年度	800,000	240,000	1,040,000
2012年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総計	3,300,000	990,000	4,290,000

研究分野：偏微分方程式に対する逆問題

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：境界値逆問題，波の物体散乱逆問題，enclosure method，熱方程式，波動方程式，Helmholtz 方程式，粘弾性体

1. 研究開始当初の背景

本研究でいうところの逆問題とは，さまざまな物理量からなる観測データから未知の

対象に関する情報をいかに抽出するかという問題である．多くの重要な逆問題は偏微分方程式に対する逆問題として定式化され，

観測データはその解を使って記述される。特に、生体あるいは材料などの非侵襲的あるいは非破壊的な検査などに由来する媒質中の空洞、介在物、亀裂、障害物などの不連続性を抽出する逆問題における直接的解法を見出す方向の研究で、1990年代後半に研究代表者は探針法(the probe method)および囲い込み法(the enclosure method)を発見した。現在得られている知見からは、探針法は囲い込み法の究極の一般化とみなされるが、その探針法は、Isakov, V., *Inverse problems for partial differential equations*, second edition, Springer, New York, 2006 で触れられている。さらに Kirsch, A. and Grinberg, N., *The factorization method for inverse problems*, Oxford University Press, Oxford, 2008 では、その時期を前後して提出された Colton-Kirsch の線形サンプリング法、Kirsch の因数分解法および Potthast の特異源泉法と比較されながら、詳しく解説されている。このように、探針法の考え方は徐々に専門家に認知され、それら自身の研究と同時に、そのさまざまな変形や、他の逆問題への適用範囲の拡大の試みがなされている。しかし、創始者としての観点からは、探針法と囲い込み法の可能性は、まだ十分尽くされたとは言い難い状況であると言える。

2. 研究の目的

本研究では、探針法および囲い込み法のアイデアを軸として、以下のような、熱方程式、弾性体の方程式および Helmholtz 方程式等に対する基本的かつ重要な逆問題について研究を進める。

(1) 有限観測時間におけるデータを使って定式化される、さまざまな偏微分方程式に対する初期境界値逆問題。

(2) 熱方程式等に対する非適切問題。

(3) (2) と深く関係するが、Yarmukhamedov の基本解の意味についての考察と熱方程式に対する Exotic な Carleman 関数の構成可能性の是非。

(4) Helmholtz 方程式等によって支配される境界値逆問題における探針法の基礎とくにその二つの側面のうちの (B) 面についてのさらなる研究と Laplace 方程式に対する針列の Vekua 変換を通じた熱方程式における探針法や囲い込み法の可能性の是非。

(5) 一組の入射波を用いた、固定波数における音波や弾性波の障害物による散乱の逆問題への囲い込み法の応用。

3. 研究の方法

ひたすら考察を重ね、証明すべき事を見出してその証明を完成させるのが基本であるが、連携研究者等との研究討論、またさま

ざまな研究集会に参加して偏微分方程式についての最新の知見に触れることや他の研究者との交流、さらには資料収集し関連する過去の結果を検討する。

4. 研究成果

(1) 初期データを与えて波を発生させ、その波を物体に当て散乱させる。散乱された波を物体から離れた有限の場所で観測し、得られた有限観測時間におけるデータから物体の位置あるいは形状についての情報を抽出をする問題は典型的な逆問題である。

この問題を、波の支配方程式が波動方程式で与えられ、有限観測時間におけるデータのみしか使用せず、したがって有限の場所での観測をした場合について、囲い込み法を指導原理として考察した。その結果、物体を囲む、ある既知の閉曲面の外部に勝手に与えた点と物体との距離が、適当な一つの初期データによって発生させた波を、粗く言って十分長くその曲面上で観測すると、計算できることがわかった。この方法は物体内に波が入ることができしかもその速さが物体外部と不連続的に変わっている場合にも同様な結果をもたらすこともわかり、時間情報の有用性を示している。これらの結果は、熱方程式に対する初期境界値逆問題に取り組む過程で得られたものであるが、一つの初期データに対するデータから一つの意味のある情報が得られるというのが、大きな特徴である。

(2) Vekua 変換を用いて Mittag-Leffler 関数からそれと同じような漸近挙動を持つ大きなパラメータを持つ Helmholtz 方程式の特殊解を構成し、Helmholtz 方程式で支配される音響的に硬い物体の平面波による散乱の逆問題へ応用し、囲い込み法を拡張した。

(3) 非均質、等方的な熱伝導体からなる物体中に埋め込まれた、未知の非均質、非等方的な熱伝導体からなる介在物についての情報を、物体表面における有限観測時間における無限個の熱流束および温度の組すなわち Neumann-to-Dirichlet 写像から抽出する逆問題を考察することにより囲い込み法の数学的枠組みを具体的に与えるとともにその応用を与えた。詳しくは、(1)において導入した時間変数に関するある積分変換を施すことにより、大きなパラメータに依存するある非同次楕円型方程式に対する境界値逆問題に帰着させる。次に、この大きなパラメータに依存し、介在物には独立なある同次変形 Helmholtz 方程式の特別な解の存在を仮定する。この解には、大きなパラメータに関するいくつかの増大条件が課され、特に、

介在物上での、大きなパラメタに関する上と下からのある増大条件が課されている。最後に、観測時間を適当に大きくし、帰着された境界値問題に対する Neumann-to-Dirichlet 写像と上の特別な解から指示関数を構成し、その大きなパラメタに関する漸近挙動を調べると、介在物と特別な解に関係したある量を抽出できる。これが枠組みである。したがってすべてはこの特別な解の構成の問題に帰着されるのであるが、物体が非均質、等方的である場合、十分に大きなパラメタをとればその構成ができるという知見を得た。得られた特別な解は、大きなパラメタと、我々が仮想 slowness と呼ぶ、もうひとつのパラメタを入れた複素ベクトルから決まる相関数を持つ複素指数関数解の摂動であるが、仮想 slowness を先に大きくとり固定するということが構成できるというのが発見である。

(4) ひとつの点源入射波による、Helmholtz 方程式を支配方程式とする、音響的に硬い物体による音波の散乱の逆問題の 2 次元版への囲い込み法の応用について考察し、点源が物体から十分に離れていればその凸包が抽出できることを証明した。

(5) ひとつの点源または平面入射波による、Helmholtz 方程式を支配方程式とする、音響的に硬い物体による音波の散乱の逆問題の 2 次元版への囲い込み法の応用について再考した。従来は、多角形状の障害物の凸包の頂点を得るには、二つの独立かつ正則な方向に対する指示関数を用いていたのだが、今回は、一つの方向に対する指示関数の対数微分を用いれば凸包の頂点の位置が抽出されることを証明した。この結果は、手間を半分にするものであり、副産物として、正則でない方向の情報も得られることがわかった。

(6) 物体から離れた場所で、初期データを与えて波を発生させ、その波を物体に当て散乱させる。散乱された波を物体から離れた場所で有限時間観測し、得られたデータから物体の位置あるいは形状についての情報を抽出する問題は典型的な逆問題であるが、初期データを発生させた場所で観測された波、すなわち、後方散乱データから物体のどんな情報が抽出できるかについて考察した。その結果、この場合でも囲い込み法が適用できて、物体の表面における境界条件が消散的または物体の内と外で屈折率が異なる場合について、粗く言って、十分長くしかし有限の時間で観測された後方散乱データから、初期データの台と物体との距離が抽出できることがわかった。データを発

生させる場所と観測する場所が局所化されている場合における囲い込み法の新しい展開を与えた点にこの結果の意義がある。

(7) Helmholtz 方程式を支配方程式とする逆散乱問題における一意性について意外な結果を得た。詳しくは、音響的に柔らかい物体に、波数を固定した一つの入射方向の平面波を、無限遠から当てて散乱波を発生させる。その無限遠での漸近挙動の初項 (far-field pattern) から物体が一意的に決定されるか、という問題は、現在でも、一般の滑らかな物体の場合には未解決である。この問題の部分的肯定的結果として、以下の二つの仮定のもとで一意性を保証する Colton-Sleeman の定理が知られている：(i) 物体がある既知の有界領域に含まれている；(ii) 波数の 2 乗が、その領域の、Dirichlet 境界条件のもとでの、負の Laplacian の第一固有値よりも小さい。今回の結果は、この定理の改良であり、Helmholtz 方程式の positive supersolution をうまく用いれば、(i) の有界領域の部分を含めて、物体が既知のある方向に非有界な領域に含まれるとしても、一意性が導かれることを示した。

(8) 有限の大きさの空洞内の空洞の壁面から離れた場所で、初期データを与えて波を発生させ、その波を壁面に当て散乱させ、散乱された波を壁面から離れた場所で有限時間観測する。観測された波形データから壁面の位置あるいは形状についての情報を抽出する問題について考察した。波の支配方程式が古典的な波動方程式、壁面表面上の境界条件が同次 Neumann または Dirichlet の場合、空洞内の固定した 1 点に対して、その点に最も近い空洞の壁面上のすべての点を適当な無限個の初期データで発生した波の後方散乱データからすべて抽出できることおよびその任意の 1 点が既知であるとすればその点における Gauss 曲率および平均曲率が、2 個の適当な初期データに対する後方散乱データから抽出できることがわかった。この意義は、限られた境界条件ではあるが、空洞壁面の形状に関する重要な量である Gauss 曲率および平均曲率が抽出できることが示された点にある。これが、有限の距離でデータを得ることの利点の一つと思われる。なお、Lax-Phillips, Majda らの古典的結果において、彼らの散乱データである散乱核からこれら二つの曲率を抽出する結果は研究代表者の知る限り存在しない。外部問題の場合も変更なしでこれらの結果が得られることも指摘しておく。

(9) 有界領域における熱方程式に対する境界

値逆問題における無限個の熱流束を使った
囲い込み法を、粘弾性体の支配方程式に対
する類似の問題へ拡張した。この結果は、
連立偏微分方程式系における囲い込み法の
展開のための重要なステップであると考え
ている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者に
は下線)

[雑誌論文] (計 13 件)

1. Ikehata, M., Mittag-Leffler's function, Vekua transform and an inverse obstacle scattering problem, *Inverse Problems*, 26, 045004(18pp), 2010, 査読有
2. Ikehata, M., The probe and enclosure methods for inverse obstacle scattering problems. The past and present., *RIMS Kōkyūroku*, No. 1702, pp. 1-22, 2010, 査読無
3. Ikehata, M., A note on the enclosure method for an inverse obstacle scattering problem with a single point source, *Inverse Problems*, 26, 105006(17pp), 2010, 査読有
4. Ikehata, M. and Kawashita, M., On the reconstruction of inclusions in a heat conductive body from dynamical boundary data over a finite time interval, *Inverse Problems*, 26, 095004(15pp), 2010, 査読有
5. Ikehata, M., The enclosure method for inverse obstacle scattering problems with dynamical data over a finite time interval, *Inverse Problems*, 26, 055010(20pp), 2010, 査読有
6. 池島 優, 逆問題における不連続性の抽出のための解析的方法-探針法 10 年-, *数学*, 62(3), pp. 289-314, 2010, 査読有
7. Ikehata, M., The framework of the enclosure method with dynamical data and its applications, *Inverse Problems*, 27, 065005(16pp), 2011, 査読有
8. Ikehata, M., Inverse obstacle scattering problems with a single incident wave and the logarithmic differential of the indicator function in the enclosure method, *Inverse Problems*, 27, 085006(23pp), 2011, 査読有
9. Ikehata, M., On uniqueness in the inverse obstacle problem via the positive supersolutions of the

Helmholtz equation, *Inverse Problems*, 28, 035007(6pp), 2012, 査読有

10. Ikehata, M., Niemi, E. and Siltanen, S., Inverse obstacle scattering with limited-aperture data, *Inverse Problems and Imaging*, 6, pp. 77-94, 2012, 査読有
11. Ikehata, M., The enclosure method for inverse obstacle scattering problems with dynamical data over a finite time interval:II. Obstacles with a dissipative boundary or finite refractive index and back-scattering data, *Inverse Problems*, 28, 045010(29pp), 2012, 査読有
12. Ikehata, M. and Itou, H., On reconstruction of a cavity in a linearized viscoelastic body from infinitely many transient boundary data, *Inverse Problems*, 28, 125003(19pp), 2012, 査読有
13. Ikehata, M., An inverse acoustic scattering problem inside a cavity with dynamical back-scattering data, *Inverse Problems*, 28, 095016(24pp), 2012, 査読有

[学会発表] (計 15 件)

1. 池島 優, Recent applications of the enclosure method to dynamical inverse problems, 広島応用解析セミナー(第 11 回), 2009.9.2, 広島大学工学部, 広島
2. Masaru Ikehata, Recent applications of the enclosure method to inverse problems with dynamical data over a finite time interval, *Inverse Problems Seminars*, 2009. 11.9, University of Helsinki, Finland
3. 池島 優, 有限観測時間におけるデータを用いた音波の障害物による散乱の逆問題, *RIMS 研究集会「現象解析と関数方程式の新展望」*, 2009.11.17, 京都大学, 京都
4. 池島 優, The enclosure method and its applications to inverse problems with dynamical data over a finite time interval, *名古屋微分方程式セミナー*, 2009.12.14, 名古屋大学, 愛知
5. 池島 優, The probe and enclosure methods for inverse obstacle scattering problems. The past and present., 第 27 回九州における偏微分方程式研究集会, 2010.1.26, 九州大学西新プラザ大会議室, 福岡
6. 池島 優, The enclosure method for inverse obstacle scattering problems with dynamical data over a finite time

- interval, 日本数学会 2010 年度年会函数方程式論分科会, 2010. 3. 24, 慶應義塾大学, 神奈川
7. 池島 優, Some remarks on inverse obstacle scattering problems with a single incident wave, RIMS 研究集会「偏微分方程式の逆問題解析とその周辺分野に関する研究」, 2010. 6. 23, 京都大学数理解析研究所, 京都
 8. 池島 優, 有限観測時間におけるデータを用いた熱および波動方程式に対する逆問題と囲い込み法, 日本数学会 2010 年度秋期総合分科会函数方程式論分科会特別講演, 2010. 9. 23, 名古屋大学, 愛知
 9. 池島 優, The enclosure method for inverse obstacle scattering problems with dynamical back-scattering data over a finite time interval, 数理科学セミナー, 2011. 9. 26, 松本市浅間温泉みやま荘, 長野
 10. 池島 優, 波の物体散乱の逆問題における直接的方法, 公開談話会, 2011. 10. 24, 名古屋大学, 愛知
 11. Ikehata, M., The enclosure method in inverse obstacle scattering, Finish-Japanese-Korean workshop on inverse problems and the 17th Inverse days of the Finnish Inverse Problem Society, 2011. 12. 14, University of Helsinki, Finland
 12. 池島 優, Inverse obstacle scattering with dynamical data over a finite time interval, RIMS 研究集会「偏微分方程式の逆問題解析とその周辺分野に関する研究」, 2012. 1. 24, 京都大学数理解析研究所, 京都
 13. 池島 優, Extracting the geometry of an acoustic enclosure from dynamical back-scattering data: an inverse

problem for the wave equation, RIMS 研究集会「幾何学的偏微分方程式に対する保存則と正則性特異性の研究」, 2012. 6. 14, 京都大学数理解析研究所, 京都

14. 池島 優, Extracting the geometry of an obstacle from the bistatic scattering data, RIMS 研究集会「偏微分方程式の解の幾何」, 2012. 11. 8, 京都大学数理解析研究所, 京都
15. 池島 優, The enclosure method for the wave equation using dynamical scattering data, RIMS 研究集会「偏微分方程式の逆問題解析とその周辺に関する研究」, 2012. 11. 19, 京都大学数理解析研究所, 京都

[その他]
ホームページ等

<http://math.dept.eng.gunma-u.ac.jp/~ikehata/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

池島 優 (IKEHATA MASARU)
群馬大学・大学院工学研究科・教授
研究者番号: 90202910

(2) 連携研究者

伊藤 弘道 (ITOU HIROMICHI)
群馬大学・大学院工学研究科・助教
研究者番号: 30400790
(平成 21 年度～平成 24 年度)