

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24年 3月 31日現在

機関番号：12608

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2011

課題番号：21540164

研究課題名（和文）放物型偏微分方程式の非負値解の構造と楕円型作用素の摂動論の研究

研究課題名（英文）Study on the structure of nonnegative solutions for parabolic equations and the perturbation theory of elliptic operators

研究代表者

村田 實（MINORU MURATA）

東京工業大学・大学院理工学研究科・教授

研究者番号：50087079

研究成果の概要（和文）：リーマン多様体上の筒状領域での放物型偏微分方程式の非負値解の構造を研究し、一般的でほぼ最適な仮定[定数関数 1 が随伴楕円型作用素の半小摂動である]の下で任意の非負値解の具体的な積分表示を与えた。さらに、球対称リーマン多様体上の熱方程式を研究し、「定数関数 1 が付随する楕円型作用素の半小摂動である」ための幾何的な特徴付けと初期値問題の非負値解の一意性が成り立つための最適な十分条件を与えることにより、熱方程式の非負値解の構造を解明した。

研究成果の概要（英文）：We investigated the structure of nonnegative solutions to parabolic equations in cylinders on Riemannian manifolds, and gave explicit integral representation formulas for any solutions under the general and optimal condition that the constant function 1 is a semismall perturbation of the associated elliptic operator; whose geometric characterization was also given in the case of the heat equation on rotationally symmetric Riemannian manifolds. Furthermore, by using the characterization and giving a sharp sufficient condition for the uniqueness of nonnegative solutions to the Cauchy problem, we determined the structure of nonnegative solutions to the heat equation on rotationally symmetric Riemannian manifolds.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2010年度	1,000,000	300,000	1,300,000
2011年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,100,000	930,000	4,030,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：解析学、関数方程式、関数解析学、確率論

1. 研究開始当初の背景

近年偏微分方程式論においては、単に解の存在だけでなく解全体の構造や解の特性を

具体的に把握することが重要になってきている。放物型偏微分方程式の非負値解の構造については、20世紀後半に公理的ポテン

シャル論で抽象的レベルでの説明は為されたが、ごく僅かの単純な場合を除いて、放物型方程式の(初期条件・境界条件を課さない)非負値解全体の構造を具体的に決定しようという研究は為されなかった。また、研究代表者が1986年に楕円型偏微分方程式の正值解の構造の具体的決定の研究に関連して楕円型偏微分作用素の摂動理論を始めてから多くの成果が蓄積されたが、幾つかの未解決問題が残され摂動理論が十分に展開されていないのが現状である。

2階楕円型・放物型偏微分方程式は数学の各分野にまたがる重要な研究対象であり、本研究課題に関連する研究は過去20数年間に著しく進展した。代表者(村田實)は量子力学に関連するSchroedinger半群の長時間漸近形を決定し、これを契機として非相対コンパクト領域上の2階線形楕円型偏微分方程式の正值解全体の構造と放物型偏微分方程式に対する初期値問題の非負値解の一意性の必要十分条件を研究し一つの流れを形成した。確率論ではA. Grigoryan, L. Saloff-Coste, 竹田雅好等により拡散過程の大域的性質に関連して、熱核の重要な評価が与えられ楕円型偏微分作用素の摂動論への寄与があった。また次元拡散過程については、富崎により、定数関数1が付随する楕円型偏微分作用素の“小さな”摂動であるための特徴づけがFellerによる境界点の分類を用いて与えられた。ポテンシャル論ではA. Ancona, A. Grigoryan, W. Hansen, 村田實, Y. Pinchover, 相川弘明等によりグリーン関数の比較定理の確立や摂動論の発展などがあった。偏微分方程式論ではE.B. Fabes, N. Garofalo, S. Salsa, B. Mair, J.C. Taylor, 村田實等により放物型方程式の(初期条件・境界条件を課さない)非負値解全体の構造が幾つかの重要な場合に決定された。

研究代表者(村田實)は既に放物型方程式に対する初期値問題の非負値解の一意性が成り立つための最適な十分条件を領域の幾何学的特性および方程式の無限遠での漸近的性質を用いて与える(石毛和弘との共同研究を含む)と共に、一意性が成立するならば定数関数1が付随する楕円型偏微分作用素の“大きな”摂動であることを示した。また定数関数1が付随する楕円型偏微分作用素の“小さな”摂動ならば一意性が破れることを示し、非一意性が成り立つための最適な十分条件を領域の幾何学的特性および方程式の無限遠での漸近的性質を用いて与えた。さらに、熱核に対する条件IU (intrinsic

ultracontractivity) が成り立てば定数関数1が付随する楕円型偏微分作用素の“小さな”摂動であることを示し、条件IUの下で筒状領域での放物型方程式の任意の(初期条件を課さない)非負値解の積分表示式を与えた。この表示式は付随する楕円型偏微分方程式に関する領域のマルチン境界を用いるもので、これにより多くの重要なケースについて放物型偏微分方程式の非負値解の構造を具体的に決定することができる。しかしながら、条件IUは初期値問題の非負値解の一意性が破れるための最適な十分条件ではない。(初期値問題の非負値解の一意性が成り立つ場合には、Ancona, Taylorにより1992年に、筒状領域での放物型方程式の任意の(初期条件を課さない)非負値解の積分表示式が与えられていた。)

## 2. 研究の目的

本研究ではRiemann多様体内の非相対コンパクト領域上の2階線形放物型偏微分方程式の非負値解の構造・付随する楕円型偏微分作用素の摂動理論およびそれらの相互関係を研究する。その目的は、解の構造と摂動理論を其々個別に研究するのではなく相互の関係を明らかにしつつ総合的に遂行することである。本研究では筒状領域上の放物型方程式の(初期条件・境界条件を課さない)非負値解全体の構造をリーマン多様体の大域的特性や方程式の無限遠での漸近的性質を用いて具体的に決定することに重点を置いている。非相対コンパクト領域上の非一様な構造を持つ放物型方程式に対して非負値解全体の具体的構造を問題にし、楕円型偏微分作用素の摂動理論と非負値解全体の構造との相互関係明らかにしつつ摂動論を解の構造解明に活用する。また、ユークリッド空間上の方程式でさえもより広いリーマン多様体上の方程式の枠の中で総合的に捉えることによりその構造を明らかにする。これらが本研究の目的である。

より具体的には、本研究では主に次の二つの研究を遂行する:(い)放物型方程式に対する初期・境界値問題の非負値解の一意性が破れるための最適な十分条件の下で、筒状領域上の放物型方程式の(初期条件・境界条件を課さない)非負値解全体の構造を具体的に決定する;(ろ)放物型偏微分方程式の非負値解の構造との関わりを明らかにしつつ楕円型偏微分作用素の摂動理論を整備・発展させる。特に、様々な概念が成り立つための十分条件を領域の幾何学的特性および方程式の無限遠での漸近的性質を用いて与える。

### 3. 研究の方法

種々の正値性によって支配される2階線形放物型・楕円型偏微分方程式は数学の各分野にまたがる重要な研究対象であり、その非負値解の構造や付随する楕円型偏微分作用素の摂動論の研究に関連する研究者は国内外に存在している。従ってこの研究を押し進めるためには相互の研究交流特に国外研究者との交流を活発に行うことが重要である。具体的には、国外の専門家を訪ねて review を受けるとともに彼らを日本に招いて最新の成果を吸収し(例えば、イスラエル Israel Institute of Technology の Y. Pinchover を招待予定) 自・他大学の研究者(優秀な大学院生を含む)と研究集会・セミナー・e-mail・プレプリントの交換等を通じて研究連絡を密に行うとともに研究成果の討論と情報交換を行う。

役割分担については全体の調整・連絡等は代表者が行い、分担者・代表者は下記の研究に当たる:(い)微分方程式論的・ポテンシャル論的・実解析的方法による2階線形放物型偏微分方程式の非負値解の構造解明と楕円型偏微分作用素の摂動論の研究(代表者、宮本安人、志賀啓成);(ろ)確率論的・ポテンシャル論的方法による2階線形放物型偏微分方程式の熱核と楕円型偏微分方程式のグリーン関数の無限遠での漸近解析およびその非負値解の構造解明と楕円型偏微分作用素の摂動論への応用の研究(代表者、内山耕平)。

より具体的な研究計画は次のとおりである:

(a) 放物型方程式に対する初期・境界値問題の非負値解の一意性が破れる場合に、筒状領域の放物型方程式の(初期条件・境界条件を課さない)非負値解全体の構造を具体的に決定する研究を代表者が研究分担者の宮本安人等と連絡を取りつつ遂行する。更に放物型方程式の非負値解の積分表示の確率論的・ポテンシャル論的研究を内山耕平、富崎松代、相川弘明、志賀啓成、鈴木紀明、Pedro J. M.-Hernandez、L. Riahi 等と連絡を取りつつ行う。関連する問題として、ユークリッド空間上の周期係数楕円型偏微分作用素やリーマン対称空間上のラプラス作用素のように一様な構造を持つ楕円型作用素およびその摂動を生成作用素とする放物型偏微分方程式の熱核の無限遠での漸近形を求めて放物型マルチン境界を決定する研究を土田哲生、Y. Pinchover 等連絡を取りつつ行う。

(b) 放物型偏微分方程式の非負値解の構造との関わりを明らかにしつつ楕円型偏微分

作用素の摂動論の解析的・幾何的・確率論的研究を代表者が P. J. M.-Hernandez、Y. Pinchover、相川弘明、久村裕憲、富崎松代、内山耕平等と連絡を取りつつ行う。特にリーマン多様体上のラプラス作用素に関して、intrinsic ultracontractivity と semismall perturbation の最適な十分条件を多様体の幾何学的性質を用いて与える研究に力を注ぐ。

### 4. 研究成果

(1) 村田實は P. J. Mendez とともにリーマン多様体上の筒状領域での2階放物型偏微分方程式の非負値解の構造を研究し、一般的でほぼ最適な仮定[定数関数1が随伴楕円型作用素の半小摂動である]の下で任意の非負値解の具体的な積分表示を与えた。村田が2007年に J. Functional Analysis にて熱核に対する仮定「intrinsic ultracontractivity」の下で任意の非負値解の具体的な積分表示を与えるまでは、放物型方程式の非負値解の積分表示は抽象論と極僅かの例のみが知られていたが、この結果は一般の仮定の下で非負値解の具体的な積分表示を与える定理として決定的なものである。また半小摂動から熱核の semi-intrinsic ultracontractivity が従うことも示した。

村田實は、土田哲生とともに1次元ユークリッド空間上の周期係数2階楕円型微分作用素に付随する放物型方程式の基本解の時間変数・空間変数が無限大での精密な漸近形を与えた。さらにそれを用いて、この放物型方程式に関する下半空間の放物型マルチンコンパクト化とマルチン境界を決定した。これまでは時空空間内の変数が制限された方向に沿って無限大になる時の基本解の漸近形と極小マルチン境界の構造のみが知られていたが、この結果は時空空間内の変数が任意の方向に沿って無限大になる時の基本解の漸近形を与え、放物型マルチンコンパクト化を位相までこめて完全に決定したものである。

村田實は球対称リーマン多様体上の熱方程式を研究し、「定数関数1が付随する楕円型作用素の半小摂動である」ための幾何的な特徴付けと初期値問題の非負値解の一意性が成り立つための最適な十分条件を与え、熱方程式の非負値解の構造を解明した。この結果は、村田實等により確立された一般的な放物型偏微分方程式の非負値解の構造定理を球対称リーマン多様体上の熱方程式に応用したものである。また、村田實は土田哲生とともに、1次元ユークリッド空間上の摂動項

を持った周期係数 2 階楕円型微分作用素のレゾルベントのスペクトルの下端でのスペクトルパラメータに関する漸近展開と付随する放物型方程式の基本解の時間変数が無限大での漸近展開公式を与えた。この結果は、村田實の 1985 年の結果の 1 次元の場合を一般化・改良したものである。

(2) 二次のモーメントを持つ正方格子上のランダムウォークはよく知られた Donsker の不変原理に基づき、適当な規格化によりブラウン運動により近似できる。しかしこの近似は道の空間の距離による位相に関するもので各点ごとの近似についてはほとんど何の評価も与えない。例えば、半直線を除いた截線平面において 2 次元ランダムウォークに関する調和測度が半直線の端点付近でどのようにふるまうかは Donsker の不変原理からはなにも得られない。各点ごとの評価は応用上しばしば必要になり、特別な場合であってもそれを求めることは重要である。

内山耕平は上の例を含むいくつかの具体的例において Green 関数、推移確率、到達時刻の分布、調和測度についてそのような評価を与えた。得られた結果は、多くの場合、自然な条件下で最良のものであり、単純ランダムウォークの場合でさえ従来知られていた結果を改良している。

(3) 志賀啓成は Klein 群の不連続領域が単連結であるとき、そのリーマン写像と Klein 群の双曲幾何学的な性質の関連性を調べた。特に幾何学的有限な Klein 群をそのリーマン写像の微分の増大度で特徴付けることに成功した。この結果よりリーマン写像の境界値の連続度について情報が得られたが、その関連から古典的な Hardy-Littlewood の定理の一般化を得た。この研究の発展としてさらに古典的な Cauchy 積分の境界挙動を研究し、その境界値と境界関数を定義する特異積分の連続度に関して新しい知見を得た。一方、タイヒミュラー空間などに応用がある正則運動について、その拡張問題を研究し、パラメータ空間がある種の除外集合を持つとき、それが正則運動に関して除去可能であることを示した。また、リーマン面のモジュライ空間の 1 点の単射半径をその点を表すリーマン面の双曲構造を用いて下から評価することに成功した。

(4) 宮本安人は、楕円型偏微分方程式の境界値問題について解の構造や解の形状と、生物学に現れる放物型方程式の解の挙動について研究した。一般的にディリクレ問題の正値解については多くの研究があるが、符号変化やノイマン問題については、詳しいこと

は知られていなかった。そこで、一般的な非線形項を持つ方程式の球領域におけるノイマン問題を研究し、大域的な枝が存在することを示した。さらに、対称解からなる枝上に対称性破壊を起こす分岐点が円環領域や矩形領域において無限個存在することを示した。その過程で、ディリクレ問題において知られていたコーナー点の補題のノイマン問題版に相当する強一意接続性定理を示した。ディリクレ問題の符号変化について、球領域と二次元対称領域で、大域的な枝があることを示した。次に、フェーズフィールドモデルに現れる変分問題の安定解の形状を研究し、この問題がホットスポット予想と密接に関係していることを示した。さらに、対称性を仮定しない二次元凸のある領域のクラスで、ホットスポット予想を肯定的に解決した。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 27 件)

- (1) Y. Miyamoto, Asymptotic transversality and symmetry breaking bifurcation from boundary concentrating solutions, *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Analyse Non Linéaire*, 査読有, 29 (2012), 59--81.
- (2) Minoru Murata, Nonnegative solutions of the heat equation on rotationally symmetric Riemannian manifolds and semismall perturbations, *Rev. Mat. Iberoam.*, 27 巻(2011), 885-907. 査読有
- (3) K. Uchiyama, The First Hitting Time of A Single Point for Random Walks Elect. *J. Probab.* vol. 16, no. 71, 1160-2000 (2011) 査読有
- (4) H. Miyachi and H. Shiga, Holonomies and the slope inequality of Lefschetz fibrations, *Proc. Amer. Math. Soc.* 139 (2011), 1299--1307. 査読有
- (5) Minoru Murata and Tetsuo Tsuchida, Parabolic Martin boundaries and asymptotic formulas of heat kernels for one-dimensional elliptic operators with periodic coefficients, *Potential Anal.*, 33 巻(2010), 387-414. 査読有
- (6) K. Uchiyama, The Green Functions Of Two Dimensional Random Walks Killed On A Line And Their Higher Dimensional Analogues, *Elect. J. Probab.*, no. 37, vol. 15, 1161-1189 (2010) 査読有

- (7) S. Mitra and H. Shiga, Extensions of holomorphic motions and holomorphic families of isomorphisms of  $M^*$  obius groups, Osaka J. Math. 47 (2010), 1167--1187. 査読有
- (8) Y. Miyamoto, Global branches from the second eigenvalue for a semilinear Neumann problem in a ball, Journal of Differential Equations, 査読有, 249 (2010), 1853--1870.
- (9) Minoru Murata and Pedro J. Mendez-Hernandez, Semismall perturbations, semi-intrinsic ultracontractivity, and integral representations of nonnegative solutions for parabolic equations, J. Func. Anal., 257 卷(2009), 1799-1827. 査読有
- (10) K. Uchiyama, The mean number of sites visited by a random walk, Math. Zeitschrift. 2009, vol.261, 277-295 . 査読有
- (11) H. Shiga, Riemann mappings of invariant components of Kleinian groups, J. London Math. Soc., 2009, 90: p. 716--728. 査読有
- (12) Y. Miyamoto, The "hot spots" conjecture for a certain class of planar convex domains, Journal of Mathematical Physics, 査読有, 50 (2009), 103530, 7 pp.

[学会発表](計 42 件)

- (1) 村田實, 歪積型楕円型方程式の正值解の構造, 2011年11月3日, 岐阜大学研究集会「2011年度ポテンシャル論研究集会」, 代表者: 菱川洋介, 招待講演
- (2) H. Shiga, Kleinian groups and geometric function theory Complex Analysis Seminar, 2011年8月12日 Morning Center of Mathematics, Beijing, 招待講演
- (3) Y. Miyamoto, Nonradial maximizers for a Henon type problem and symmetry breaking bifurcations for a Liouville-Gel'fand equation with a vanishing coefficient, Second Italian-Japanese Workshop GEOMETRIC PROPERTIES FOR PARABOLIC AND ELLIPTIC PDE's, 2011年6月23日, Palazzone, Cortona (イタリア), 招待講演
- (4) H. Shiga, Teichmuller spaces and holomorphic maps Teichmuller theory, 2010年12月1日, MFO, Oberwolfach, 招待講演
- (5) 村田實, Nonnegative solutions of the heat equation on rotationally symmetric Riemannian manifolds and semismall perturbations, 2010年11月6日, 大分大学, 研究集会「ポテンシャル論研究集会」代表者: 大野貴雄, 招待講演
- (6) Y. Miyamoto, Stable patterns and solutions with Morse index one, The 35<sup>th</sup> Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 2010年8月23日, 北海道大学, 招待講演
- (7) H. Shiga, Holonomies and the slope inequalities of Lefschetz fibrations XXI Rolf Nevanlinna Colloquium 2009年9月11日, 京都大学, 招待講演
- (8) 村田實, Structure of nonnegative solutions for parabolic equations and perturbation theory for elliptic operators, 2009年9月7日 京都大学, 国際会議「The XXI Rolf Nevanlinna Colloquium」, 代表者: 小島定吉, 招待講演
- (9) Y. Miyamoto, Stable patterns for shadow systems and a nonlinear "hot spots" conjecture, 1<sup>st</sup> Italian-Japanese workshop on geometric properties for parabolic and elliptic PDE's, 2009年6月16日, 東北大学, 招待講演

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

村田 實 (MURATA MINORU)  
東京工業大学・大学院理工学研究科・教授  
研究者番号: 50087079

### (2) 研究分担者

志賀 啓成 (SHIGA HIROSHIGE)  
東京工業大学・大学院理工学研究科・教授  
研究者番号: 10154189

### (3) 研究分担者

内山 耕平 (UCHIYAMA KOUHEI)  
東京工業大学・大学院理工学研究科・教授  
研究者番号: 00117566

### (4) 研究分担者

宮本 安人 (MIYAMOTO YASUHIITO)  
東京工業大学・大学院理工学研究科・助教  
研究者番号: 90374743