様式Ｃ－１９

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 25 年 6 月 13 日現在

機関番号：１２６１４
研究種目：基盤研究（Ｃ）
研究期間：2009～2012
課題番号：21540165
研究課題名（和文）逆問題と非線形積分変換

研究課題名（英文）Inverse problems and nonlinear integral transforms

研究代表者
上村　豊　（KAMIMURA YUTAKA）
東京海洋大学・海洋科学技術研究科・教授
研究者番号：50134854

研究成果の概要（和文）：非線形積分変換の理論を構築し、分岐の逆問題の大域的定理を得た。この結果をもとに、自励微分方程式の非線形項を、周期対応関数、すなわち、周期と振幅の関係から定める問題を研究し、与えられたリプシッツ連続な周期対応関数を実現する非線形項の大域存在を証明するとともに、その非線形項の特徴づけをした。これにより、未解決であった非線形自励振動の古典的逆問題に完全な解答が与えられた。

研究成果の概要（英文）：We establish a theory of a nonlinear integral transform and obtain a global theorem for an inverse problem in bifurcation theory. Based upon the result we consider a problem of determining a nonlinearity of an autonomous differential equation of a period function, namely, a relation between periods and amplitudes to prove a global existence of nonlinear terms realizing a prescribed, Lipschitz continuous period function and characterize the nonlinear terms. This gives a complete answer to a classical inverse problem in a nonlinear autonomous　oscillation.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2009 年度	700,000	210,000	910,000
2010 年度	500,000	150,000	650,000
2011 年度	500,000	150,000	650,000
2012 年度	600,000	180,000	780,000
年度			
総　計	2,300,000	690,000	2990,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学、基礎解析学
キーワード：関数方程式、逆問題、非線形大域理論

１．研究開始当初の背景　応用も豊富に内包する非線形積分変換の系統的研究は、散乱変換を除けば、ほぼ、皆無であった。それゆえに、単に逆問題の解の存在定理や積分方程式の定性的理論を一歩進めて、逆問題のインプットからアウトプットへの対応の非線形積分変換の特性を抽出し、その背後に潜む数理構造や汎用性を明らかにする研究が期待されていた。

２．研究の目的　本研究の目的は、逆問題から生じる非線形積分変換の基礎理論を確立し、対応する逆問題自身の解決およびその積分変換を用いて得られる数学理論の構築を行うことにより、非線形積分研究の系統的研究の芽を作ることにあった。

３．研究の方法　非線形項の形によっては非線形項に分岐曲線を対応させる変換（分岐変

換）を大域的な積分変換として定式化し、その基礎理論構築（変換の働く空間設定と逆変換の存在および構成）を行うところから、研究は開始された。一方で、この問題は、自励系微分方程式の解の振幅に周期を対応させる関数（周期対応関数）から復元力を定める古典的な（力学の）逆問題と密接な係りをもつことがわかっていた。この古典的な逆問題における解、すなわち復元力の大域存在は、逆問題においてよく知られた未解決問題であり、この問題の非線形積分変換を含む形で系統的な研究を行うことにより、その未解決問題が自動的に解決されるように、研究を計画した。

４．研究成果

(1) 分岐変換を含む非線形積分変換は２つの（正値関数を要素とする）距離空間の間の同型を与えることを証明した。この成果は、５の項の雑誌論文③に掲載した。掲載雑誌の Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa は大作のみを掲載する雑誌であり、そのため掲載までに時間がかかったが、本研究課題における最初の基礎的成果である。

この成果の骨子は、非整数階の微分積分を巧みに用いて非線形積分方程式の解の大域存在を示すこと（論文の第３節）にあり、その方法は、非線形積分作用素のどのような仕組みが解の大域存在を保証するのかを一般的に調べる道筋を与えた。

(2) 対称な周期運動に限れば、復元力は、半振幅と振幅の関係から、大域的に、決定されることを証明した。より詳しく言えば、対称な周期運動の周期が振幅のリプシッツ連続な関数であれば、その周期を実現する復元力が大域的に存在することを示した。証明は、逐次近似法と(1)で述べた非整数階の微分積分を組み合わせて、構成的になされており、その結果として、復元力を実際に構成する手順（再構成法）が得られた。

この成果は、５の項の雑誌論文⑤に掲載され、３の項で述べた未解決問題を、対称な周期運動に対し解決したものとして高く評価された。

(3) 対称とは限らない一般の周期運動について、周期対応関数から復元力を定める問題について、(2)の成果を踏まえて詳細に研究し、兼谷猛志と共同で、与えられた周期対応関数を実現する復元力を、周期対応関数と正の振幅に負の振幅を対応させる関数（対合）から再構成する方法を確立するとともに、復元力を明示的に表す公式を導出した。この明示公式は、周期対応関数および対合に復元力を対応させる変換がどのようなものであるかを簡潔に記述している。さらに、この明示公式を等時性の問題に適用し、周期運動の周期が振幅によらずに定数であるような非線形項を決定した。

これらの研究成果は、５の項の雑誌論文①に掲載した。これにより、20 世紀後半から懸案であった未解決問題の完全な解答が与えられた。

(4) 上の結果を、自励微分方程式の解の初速０における位置に周期を対応させる関数（周期初期値対応関数）から復元力を定める問題に応用し、対合と合成不変なリプシッツ連続関数が与えられたとき、これを周期初期値対応関数として実現する（連続な）復元力が大域的に存在すること、また、その復元力が一意に定まるためには、与えられたリプシッツ連続関数が定数部分を持たないことが必要十分であることを証明した。

(5) 以上の研究成果が、逆問題研究の歴史の中でどのように位置づけられるのかを、以下に記す。

一般に、自然現象がある法則に従っているものの、その法則を適用するために必要な条件や要素が未知であるとき、その未知量を観測データから定める問題を総称して、逆問題という。現象を理解するために本質的で自然な問題意識であるから、このような問題は古くから研究されてきた。たとえば、ニュートンの運動の法則が得られてからは、等時振り子の問題（ホイヘンス）、最速降下線の問題（ベルヌーイ）、降下時間から降下曲線を定める問題（アーベル）など、数学の新しい切り口を拓くような逆問題が研究されたし、量子力学の基礎理論が得られた前世期の前半には、直ちに逆散乱問題が研究され、非線形理論の新展開に寄与した。このころから、逆問題は、新しい研究の時代（近代逆問題研究の時代）へと入っていく。その理由は、大きくみて、２つある。

１つは、非線形問題に対する見方と研究手法が前世期の半ばには 19 世紀までの数学から格段の進歩を遂げたことである。実は、逆問題の未知量と観測データの対応は、法則に相当する方程式が線形であるか非線形であるかには関係なく（外力項を決定する逆問題を除けば）非線形であり、しかも線形からの類推が効く程度の非線形性ではない。このことに対する畏怖心が、たとえばアーベルの研究の後続が 19 世紀に現れてこなかった１つの大きな理由である。（ただし、アーベルの仕事は非整数階の微分積分演算の理論の創出へとつながった。）

もう１つは、逆問題の非適切性の問題である。20 世紀の前半までは、数学の問題は、解が存在し（存在の保証）、一意であり、（ただひとつであることの保証）問題設定の条件における微細な変動は解の変動に多大な変化をもたらさない（安定性の保証）の３つが備わっているものが適切なものであると考えられてきた。しかるに、古い時代の逆問題を

除くと、数学的に自然な、あるいは現実的に重要な逆問題の多くは3つの保証の限りにないということがだんだんと明確になってきた。逆問題では、求めるべき未知量は、法則を適用するために必要な条件や要素である。そして問題設定の条件は観測データである。したがって、解の存在は、非現実的な観測データに対してしか保証されない可能性があるし、この点が適切であったとしても、現実の観測データが数学的に意味のある逆写像の定義域からはみ出さない保証は、観測誤差に動きを命じない限り、全くない。このことの所産として、不安定な逆問題では、求めるべき未知量は観測誤差に対し敏感であり、数学的な正しさを追求した結果、非現実的な解が得られてしまうというジレンマが生じてくる。この点で、数学者および科学者・工学者は意識改革を迫られるようになった。これが、数学者を逆問題へと向かうのを躊躇させたもう1つの大きな理由である。

この意識改革との関連で、逆問題の研究の手順は、通常の、いわゆる順問題の手順とは、かなり異なっている。ある意味で存在の問題（観測データがあるべき集合の決定の問題）は、最後の問題と割り切り、一意性（同定可能）と安定性の問題ならびに、具体的に解すなわち法則を適用するために必要な条件や要素を求める手順（再構成法）の解決を優先させたのである。なお、一意であることを、逆問題では同定可能と表現する。存在の問題を後回しにした結果、はじめの問題は、観測データはどれだけあれば未知量を決めるに十分かを問うことになったためにこのような表現が用いられる。

本研究課題の中で解決された周期対応関数から復元力を定める問題は、逆問題研究が変貌を遂げようとし始めた 20 世紀の半ばころから、研究対象となってきた。最初の結果は、1937年のコークレス・ピスコーノフによるもので、等時性をもつ周期運動の復元力は無数にあり、それらは運動の正のところでの復元力と負のところでの復元力の間のしかるべき関係で得られることを示したものである。一方で、1961年に、オピアルは、対称な周期運動の復元力は、周期対応関数によって同定されることを証明した。この2つの結果により、対称な周期運動では、復元力は周期対応関数から同定されるが、非対称な周期運動は復元力は周期対応関数から同定されないことが示された。このことは、非対称な運動に対しては、観測データは、周期対応関数だけでは不十分で、何らかの追加的観測データが必要であることを示している。

占部は、等時性の問題から研究を開始したが、1964年には、対称な周期運動の復元力を周期対応関数から得る再構成法を得た。同時に、復元力の存在条件も得たが、これらは、小さな振幅のときにのみ適用可能な局所的な結果であった。しかし、占部の仕事は、強い非線形をもつこの問題に対し、初めて非線形性を克服する道を拓いたという意味で極めて意義のある研究結果である。

占部の結果は、1984年に、アルファビカにより整理され、復元力の存在のための周期対応関数の条件はリプシッツ連続で十分であることが証明された。また、同時に、アルファビカは非対称な問題に対する追加的観測データとして、対合を用い得る可能性を示唆している。しかしながら、アルファビカの結果も、占部の結果と同様に、局所的な結果であり、このころから大域的な結果が得られるかと言う点が、未解決問題として意識されるようになった。

等時性の問題に限れば、追加的観測データとして対合が適切なものであることが、1999年に、シーマ・マノサス・ヴィラデルプラットによって導出された公式によって、示された。彼らは、等時性をもつ周期運動の復元力は、対合を用いて明確な形で表されることを明らかにしたのである。

本研究課題が、最終的に目論んでいたことは、以上の先行研究をもつ周期対応関数から復元力を定める問題の完全解決であった。研究代表者は、まず、はじめに、問題そのものをさらに一般化することにより、大域理論が得られる仕組みを一般的に理解することに成功した。これが、研究成果(1)の内容である。（基本的なアイデアは、拙著「積分方程式」、共立出版、2001　の第 3 章に負っている。）

上記の成果と、アルファビカのアイデアを組み合わせることにより、対称な周期運動に対して、アルファビカの定理は、局所的のみならず、大域的に正しいことを証明した。これが研究成果(2)の内容である。

非対称な周期運動に対しても、復元力は周期対応関数と対合から大域的に定められるのか？これが残された最後の問題であった。研究代表者は、当時本学大学院前期課程の学生であった兼谷猛志と共に、この問題に取組み、シーマ・マノサス・ヴィラデルプラットが等時性をもつ周期運動に対して確立した公式の一般公式に相当する、与えられた周期対応関数と対合を実現する復元力の明示公式を導き出すことに成功した。これが、研究成果(3)の骨子である。なお、逆問題の安定性は、研究成果(1)により保証される。

こうして、本研究課題は、研究開始時に目標として設定した高いレベルに到達して完了することが出来た。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計５件）

① Yutaka Kamimura、Takeshi Kaneya、Global determination of a nonlinearity from a periodic motion、Journal of Mathematical Analysis and Applications、査読有、Vol. 403、2013、506―521
② Yutaka Kamimura、Takeshi Kaneya、Reconstruction of restoring forces from periods and amplitudes、数理解析研究所講究録、査読無、1786 巻、2012、116―121
③ Yutaka Kamimura、A nonlinear integral transform and a global inverse bifurcation theory、Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze、査読有、Serie V、Vol.X、2011、863―911
④ Yutaka Kamimura、Some inverse problems and fractional calculus、数理解析研究所講究録、査読無、1702 巻、2010、23―30
⑤ Yutaka Kamimura, Global existence of a restoring force realizing a prescribed half-period, Journal of Differential Equations、査読有、Vol.248、2010、2562―2584

〔学会発表〕（計 13 件）

① 上村　豊、自励振動の逆問題、岐阜数理科学セミナー、2013 年 5 月 24 日、岐阜大学　（招待講演）
② 上村　豊、移流拡散の逆解析、日本数学会、2013 年 3 月 20 日、京都大学
③ Yutaka Kamimura、Determination of the velocity field and diffusivities from tracer data、数理解析研究所研究集会　偏微分方程式の逆問題解析とその周辺に関する研究、2012 年 11 月 21 日　（招待講演）
④ 上村　豊、移流拡散の逆解析、関数方程式サマーワークショップ、2012 年 8 月 29 日、裏磐梯
⑤ 上村　豊、流れの再構成の数学的方法、Ⅱ、微分方程式の定性的ワークショップ、2012 年 3 月 3 日、島根大学　（招待講演）
⑥ Yutaka Kamimura、Takeshi Kaneya、Global determination of a nonlinearity from a periodic motion、数理解析研究所研究集会　関数方程式の定性的理論の新展開、2011 年 11 月 10 日、京都大学　（招待講演）
⑦ 上村　豊、Global results for some nonlinear inverse problems、微分方程式の総合的研究、2010 年 12 月 18 日、京都大学　（招待講演）
⑧ 上村　豊、大域分岐からの非線形項の決定、日本数学会　2010 年度秋季総合分科会、2010 年 9 月 22 日、名古屋大学
⑨ 上村　豊、Global existence of a restoring force realizing a prescribed half-period、関数方程式サマーワークショップ、2010 年 8 月 18 日、裏磐梯
⑩ 上村　豊、Global theory for an inverse bifurcation problem、数理解析研究所研究集会　偏微分方程式の逆問題解析とその周辺分野に関する研究、2010 年 6 月 24 日、京都大学　（招待講演）
⑪ Yutaka Kamimura、Some inverse problems and fractional calculus、数理解析研究所研究集会　現象解析と関数方程式の新展開、2009 年 11 月 17 日、京都大学　（招待講演）
⑫ 上村　豊、Reconstruction of a nonlinearity realizing a prescribed half-period、日本数学会 2009 年度秋季総合分科会、2009 年 9 月 24 日、大阪大学
⑬ 上村　豊、与えられた半周期を実現する復元力の構成法、函数方程式サマーセミナー、2009 年 8 月 1 日、鳥羽市

〔図書〕（計１件）

飯高　茂、楠岡成雄、室田一雄編、数学ハンドブック、朝倉書店、2010、731―786

６．研究組織

(1)研究代表者

上村　豊　（KAMIMURA YUTAKA）
東京海洋大学・海洋科学技術研究科・教授
研究者番号：50134854

(2)研究分担者

（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者

（　　）

研究者番号：