

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 22 日現在

機関番号：13201

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009 ～ 2011

課題番号：21540168

研究課題名（和文）ハミルトン・ヤコビ方程式のオーブリー・マザー理論の新展開とその応用

研究課題名（英文） New development and its application of Aubry-Mather theory for Hamilton-Jacobi equations

研究代表者 藤田 安啓 (Yasuhiro Fujita)

富山大学理工学研究部（理学）・教授

研究者番号：10209067

研究成果の概要（和文）：本科研費に関する研究については、オーブリー・マザー理論に関連したいくつかの結果を得て研究会やセミナーでこれらの結果を講演した。また、これらの結果はいくつかの数学専門雑誌に掲載された。

最初の結果は、ハミルトン・ヤコビ方程式の商オーブリー集合と最少化公式の一意性集合の関係を明らかにしたものである。2番目の結果は、ハミルトン・ヤコビ方程式のオーブリー集合に対する比較定理を使って古典的不等式の新たな証明を与えたというものである。3番目の結果は、リップシッツ定数を含む最適な対数型ソボレフの不等式を導いたというものである。この不等式の証明においては、あるハミルトン・ヤコビ方程式における、オーブリー・マザー理論で現れる漸近解が使われている。4つ目の結果は、2次のグラジエント項を持つあるハミルトン・ヤコビ方程式のコーシー問題の粘性解の漸近挙動に現れる収束率を考えている。その中で、この収束率を決める重要な要因がこのハミルトニアン半凸性であることを明らかにした。ここで、オーブリー集合はこのハミルトニアン半凸性と密接に関連している。

以上の結果として、オーブリー・マザー理論を使って、本科研費に関する研究は満足のいく仕事になったと確信している。

研究成果の概要（英文）：About the study of this Kakenhi, I have obtained several results related with the Aubry-Mather theory and talked about these results in several conferences and seminars. These results are published in some journals.

The first result is to clarify the relation between the quotient Aubry sets and uniqueness sets for minimization formula for Hamilton-Jacobi equations. The second one is to provide a new proof of classical inequalities by using a comparison theorem for the Aubry set of Hamilton-Jacobi equations. The third one is to derive an optimal logarithmic Sobolev inequality with Lipschitz constant. In the proof of this inequality, an asymptotic solution of the Aubry-Mather theory for a Hamilton-Jacobi equation is used. The fourth one is to investigate a rate of convergence appearing in the asymptotic behavior of a viscosity solution to the Cauchy problem for the Hamilton-Jacobi equation with quadratic gradient term. I showed that the semiconvexity property of this Hamiltonian is an important factor which determines this rate. Here, the Aubry set is closely related with the semiconvexity property of this Hamiltonian.

As a conclusion, I think that I have done a complete job about the study of this Kakenhi by using the Aubry-Mather theory.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,200,000	360,000	1,560,000
2010年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2011年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	1,020,000	4,420,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：関数方程式，ハミルトン-ヤコビ方程式，オーブリー・マザー理論，対数型ソボレフの不等式

研究開始当初の背景 (1) Hamilton - Jacobi 方程式の Aubry - Mather 理論により，Hamilton-Jacobi 方程式の解の一意性は Aubry 集合上での解の挙動で決まることが知られていた．同時に，Aubry 集合全体の情報は必要なく，Aubry 集合の部分的な情報から解の一意性が決まることも個人的には例などからだいたい分かっていた．そこで，研究開始以前から，一意性を決める最少な情報は何かということに興味を持っていた．

(2) Hamilton-Jacobi 方程式の Aubry-Mather 理論は強力な理論なので，これに関する比較定理を使って不等式に関する新たな展開を狙っていた．

(3) 上記 (1)，(2) 以外にも Hamilton-Jacobi 方程式の Aubry-Mather 理論を使って，いろいろな結果を研究したいと考えていた．たとえば，Hamilton-Jacobi 方程式の解の時刻無限大での漸近解への収束をより詳しく調べることなどを研究開始当初から目的としていた．

2. 研究の目的 これについては，次の 3 点を明らかにすることであった：

- (1) Hamilton-Jacob 方程式の一意性集合と商 Aubry 集合の関係．
- (2) 商 Aubry 集合の完全非連結性からの帰結．
- (3) Aubry-Mather 理論を用いた不等式への

応用．

3. 研究の方法 従来得られていた研究結果を丹念に読みながら，自分の時間を作り研究を積極的に進めた．また，何らかの結果を得た際や，新たな疑問が生じた際は，連携研究者や関連する研究者たちを素早く訪ね研究打ち合わせをした．そのようにして，研究が進んだ際は関連する研究会や日本数学会等で研究成果の発表を行い，広く多くの方に研究内容を知ってもらおうと同時に，意見や質問などをいただいた．

また，関連する海外の研究者を外国に訪問して討論を重ねることも行った．同時に，海外での講演もできる限り行った．

一方，研究を推進するために必要な数学の専門書や必要な備品等も購入した．

4. 研究成果

(1) Hamilton-Jacob 方程式の一意性集合と商 Aubry 集合の関係については，連携研究者の石井仁司先生と共同研究を進め，その関係を明らかにした．これについては，石井先生と共著で論文を書き（以下の 5. 主な発表論文等を参照）これはごく直近に数学専門雑誌に掲載された．

主たる結果は以下の 3 点である：

- ① Hamilton-Jacob 方程式において，Aubry 集合のある部分集合が一意性集合になるための必要かつ充分条件はその集合の商集合が商 Aubry 集合において稠密になることを明らかにした．
- ② 商 Aubry 集合の孤立点全体からなる集合が商 Aubry 集合において稠密になることが最少な一意性集合が存在するための必要かつ十分条件であること，およ

び、そのときこの孤立点全体からなる集合がひとつの最少一意性集合になるということを明らかにした。

- ③ この結果をもとに Hamilton-Jacobi 方程式の解の表現に関する新たな定理を導いた。
- ④ いくつかの例を用いて、これらの結果を詳細に説明した。

これらの結果により、研究目的の (1) は満足 of いく形で達成されたと考えられる。

(2) 商 Aubry 集合の完全非連結性からの帰結については、上記(1)の共同研究の中で、Cantor 集合を用いてその帰結を明らかにしている。また、上記(1)の論文にも記述されている。それは以下のように説明される：1次元のある Hamilton-Jacobi 方程式において、Aubry 集合が Cantor 集合で与えられる場合を考える。Cantor 集合は完全非連結なので、この場合の各商 Aubry 集合は1点のみからなる集合となる。一方、Cantor 集合は完全集合なので、商 Aubry 集合において孤立点はない。従って、研究成果 (1) で述べた結果より、最少一意性集合は存在しない。これが商 Aubry 集合の完全非連結性からのひとつの帰結である。

この例により、研究目的の (2) は満足 of いく形で達成されたと考えられる。

(3) Aubry-Mather 理論を用いた不等式への応用については、2つの成果を得ている。ひとつは、連携研究者の大森克史先生と Aubry-Mather 理論を用いた古典的不等式を統一的に導く方法を確立して、共著で論文を書き (以下を参照) 数学専門雑誌に掲載された。

もうひとつは、Aubry-Mather 理論に現れる漸近解を用いて、Lipschitz 定数を含む対数型 Sobolev の不等式を導いた。こちらについても論文を書き (以下を参照) 数学専門雑誌に掲載された。

各々について説明する。

- ① Aubry-Mather 理論を用いた古典的不等式を統一的に導く方法は、ある形の Hamilton-Jacobi 方程式を考え、その Aubry 集合に対する比較定理 (Aubry-Mather 理論に基づくもの) を使い、この Hamilton-Jacobi 方程式の解の評価を行った。それを既存の良く知られている古典的不等式の証明に応用した。ここでは、相加相乗の不等式、ヘルダーの不等式、ヒルベルトの不等式を例として考えた。

この結果については、インターネット上の

数学における論文批評の <http://www.ams.org/mathscinet/> において、In this elegant note ... という文章で紹介されており、研究目的の (3)-① は満足 of いく形で達成されたと考えられる。

② Lipschitz 定数を含む対数型 Sobolev の不等式については、フランスの数学者 I. Gentil が導いた Hamilton-Jacobi 方程式の解の超縮小性に関する不等式に関連した対数型 Sobolev の不等式において、あるパラメーターを無限大に持っていくことにより新たな対数型 Sobolev の不等式を導いた。この不等式においては、考えている関数の Lipschitz 定数が現れる。また、この不等式の応用として、考えている関数のエントロピーを用いて、別のパラメーターを無限大に飛ばすことによりその関数の Lipschitz 定数を表現するという定理を得た。さらに、この Lipschitz 定数を含む対数型 Sobolev の不等式を用いて、熱方程式の解の超縮小性に関する新たな不等式を導いた。

この結果については、インターネット上の数学における論文批評の <http://www.ams.org/mathscinet/> において、This is a very interesting and well-written paper. という文章で紹介されており、これからも研究目的の (3)-② は満足 of いく形で達成されたと考えられる。

(4) 研究目的には挙げていなかったが、2次の gradient 項をもつ Hamilton-Jacobi 方程式の解の時刻無限大での漸近挙動を調べ論文を書き (以下を参照) 数学専門雑誌に掲載された。

その内容は以下の通りである：この方程式の解の時刻無限大での漸近解への収束率を決める重要な要因は Hamiltonian に現れる関数の半凸性の性質であることを突き止めた。さらに、Aubry 集合はこの半凸性と関連しており、Aubry 集合との関連で収束率が速くなったり遅くなったりすることを定理や例を用いて示した。この論文の中では、上記結果の説明に必要なため、より一般の Hamilton-Jacobi 方程式の解の存在、一意性、Lipschitz 連続性なども証明している。この論文は、イタリアの数学者 P. Loreti 教授との共著である。

この結果については、インターネット上の数学における論文批評の <http://www.ams.org/mathscinet/> において、an interesting result is obtained... という文章で紹介されている。この結果は、

今回の研究目的には含まれていないが、Aubry 集合の性質を用いて、Hamilton-Jacobi 方程式の解の時刻無限大での漸近挙動を調べたという意味で、今回の科研費による一つの成果になっている。

以上 (1)-(4) により、Hamilton-Jacobi 方程式の Aubry-Mather 理論に基づいた新たな結果の新展開と応用は確実になされたと言ってよく、研究の目的で挙げられた各項目は満足のいく形で遂行されたと考えている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 4 件)

Y.Fujita, An optimal logarithmic Sobolev inequality with Lipschitz constants, *Journal of Functional Analysis*, 261 (2011), 1133-1144

査読有

<http://dx.doi.org/10.1016/j.jfa.2011.04.011>

Y.Fujita and H.Ishii, Uniqueness sets for minimization formulas, *Differential and Integral Equations* 25 (2012), 579-588

査読有

<http://www.aftabi.com/DIE/DIE-25-figs/p26.gif>

Y.Fujita and P.Loreti, Long-time behavior of solutions to Hamilton-Jacobi equations with quadratic gradient term, *Nonlinear Differential Equations and Applications* 16 (2009), 771-791

査読有

DOI:10.1007/s00030-009-0034-9

<http://www.springerlink.com/content/n615880m68432716/fulltext.pdf>

Y.Fujita and K.Ohmori, Inequalities and the Aubry-Mather theory of Hamilton-Jacobi equations, *Communications on Pure and Applied Analysis* 8 (2009), 683-688

査読有

doi:[10.3934/cpaa.2009.8.683](https://doi.org/10.3934/cpaa.2009.8.683)

[学会発表] (計 11 件)

Y.Fujita, Lipschitz regularizing effect and its application for Hamilton--Jacobi equations with discontinuous initial data, 非線形偏微分方程式研究会, 2012.03.06, 早稲田大学

Y.Fujita, 対数型 Sobolev の不等式と Hamilton-Jacobi 方程式の解の超縮小性について, 解析ゼミ第 56 回粘性解ダブルス, 2011.12.16, 埼玉大学

Y.Fujita, Hamilton-Jacobi 方程式から導かれる対数型 Sobolev の不等式とその応用, 研究集会「確率解析とその周辺」, 2011.11.11-13, 佐賀大学

Y.Fujita, Lipschitz 定数を含む対数型 Sobolev の不等式とその応用, 解析月曜セミナー, 2011.10.31, 東北大学

Y.Fujita, Hamilton-Jacobi 方程式から導かれる対数型ソボレフの不等式, 日本数学会 2011 年度秋季総合分科会, 関数方程式分科会, 2011.09.29, 信州大学

Y.Fujita, A logarithmic Sobolev inequality induced by Hamilton-Jacobi equations, 研究集会「Weak KAM Theory in Italy」, 2011.09-14, Cortona (Italy)

Y.Fujita, Hamilton-Jacobi 方程式の解の超縮小性と Lipschitz regularizing effect, 日本数学会 2011 年度年会, 関数方程式分科会, 2011.03.21, 早稲田大学理工学術院 (震災で中止. 講演のアブストラクトは発行)

Y.Fujita, Some topological results for minimal uniqueness sets of Hamilton-Jacobi equations, 第 27 回九州における偏微分方程式研究集会, 2010.01.26, 九州大学

Y.Fujita, An approach to classical inequalities via Hamilton-Jacobi equations, 研究集会「広島応用解析セミナー(第 12 回)」, 2010.01.13, 広島大学

Y.Fujita, Hamilton-Jacobi 方程式の商 Aubry 集合の完全不連結性と極小一意性集合の存在,

富山大学理学部数学教室 2009 年度第 2 回
談話回,
2009.12.22, 富山大学

Y.Fujita, On Hamilton-Jacobi equations
and Euclidean logarithmic Sobolev
inequalities,
研究集会「Viscosity Solutions of
Differential Equations and Related
Topics」
2009.06.24-26, 京都大学数理解析研究所

[その他]
ホームページ等

[http://www.sci.u-toyama.ac.jp/~yfujita/
index.html](http://www.sci.u-toyama.ac.jp/~yfujita/index.html)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

藤田 安啓 (Yasuhiro Fujita)
富山大学 大学院理工学研究部 (理学)・教
授
研究者番号 : 10209067

(2) 研究分担者 なし

(3) 連携研究者

石井 仁司 (Hitoshi Ishii)
早稲田大学 教育・総合科学学術院・教授
研究者番号 : 70102887

大森 克史 (Katsushi Ohmori)
富山大学 人間発達学部・教授
研究者番号 : 20110231

石井 克幸 (Katsuyuki Ishii)
神戸大学 海事科学研究科・准教授
研究者番号 : 40232227