

平成 26 年 4 月 10 日現在

機関番号：13903

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2009～2013

課題番号：21540173

研究課題名(和文)非線形発展方程式と変分不等式の特異摂動

研究課題名(英文)Nonlinear evolution equations and singular perturbations of variational inequalities

研究代表者

久保 雅弘(Kubo, Masahiro)

名古屋工業大学・工学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：80205129

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円、(間接経費) 1,050,000円

研究成果の概要(和文)：物理や工学等の数理モデルを記述し、研究する数学的手段として、未知関数とその導関数を含む方程式(微分方程式)がニュートン以来現在に至るも最も有効であり続けている。本研究では微分方程式の解に不等式で制約条件を課した問題(変分不等式)を抽象的空間における時間発展の方程式(非線形発展方程式)の立場から考察し、パラメータの極限で方程式の型が変わる問題(特異摂動問題)の極限の存在を証明した。さらに非線形解析の主要手段である変分原理と不動点解析を統合した概念として準変分解析という考え方を提唱し、その研究手段として準劣微分作用素と名付けた新しい数学的概念を導入した。

研究成果の概要(英文)：Since Newton's invention, differential equations, that are equations containing un known functions and their derivatives, have been and remain the most useful tool to describe and study mathematically various phenomena arising in physics and engineering. From the viewpoint of abstract nonlinear evolution equations, we considered variational inequalities, that are problems of differential equations with constraints given by inequalities and imposed upon the unknown functions, and proved the existence of the singular limit of a problem containing a parameter whose limit changes the type of equation. Also in the course of the study, we proposed the concept of quasi-variational analysis by synthesizing the principal tools of nonlinear analysis: variational principles and fixed point analysis, and introduced the concept of a quasi-subdifferential operator which is a new class of abstract nonlinear operators.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：非線形解析 非線形偏微分方程式 非線形発展方程式 変分不等式 凸解析 変分解析 特異摂動 劣微分作用素

1. 研究開始当初の背景

- (1) 変分不等式(微分方程式に凸集合による制約条件を課した問題)は物理や工学上の数理モデル構築のために重要な研究対象である。また、非線形発展方程式は我が国で創始・発展されてきた分野であり、研究代表者は20数年前からこの分野の研究に参画し、理論応用両面で研究を進めてきた。特に、時間依存劣微分方程式のエネルギー不等式の方法を応用して、浸透流の水力学、相転移・相分離ダイナミクス、人口動態学等、物理・工学・社会科学上の様々な現象の数理モデルを研究してきた。
- (2) 本研究開始当初、研究代表者は非線形発展方程式の理論を応用して時間依存制約条件下の双曲型変分不等式の解の存在を証明していた。これは1970年代にJ.L.Lions等が提起した問題に解答を与えるものであり、さらに、特異摂動問題に関する本研究の契機であった。

2. 研究の目的

抽象的な非線形発展方程式の理論と方法を応用して、物理や工学において数理モデルとして現れる、偏微分方程式に凸集合による制約条件を課した変分不等式に関する問題を以下の観点から研究することが目的である。

- (1) パラメータの極限で方程式の型が変化する特異極限の問題を研究する。
- (2) 様々な数理モデルに現れる変分不等式や非線形偏微分方程式について、モデルの適切性(解の存在・一意性・データに関する連続性)や最適制御問題を研究する。具体的には、
 - ・相転移・相分離ダイナミクス
 - ・浸透流の水力学
 - ・熱水力学等に現れる現象の数理モデルへの応用を考える。
- (3) 具体的な現象の数理モデルとして現れる変分不等式への応用を通じて得られる手法と知見を普遍化して、抽象的な非線形発展方程式の理論そのものの深化・発展を目指す。

3. 研究の方法

- (1) 数学的手法としては、時間依存劣微分作用素の理論の中心概念であるエネルギー不等式の方法を用いて解の一意評価を導くことが主要な研究方法である。連携研究者とは10年以上の共同研究を通じて研究成果を挙げており、適宜密接な研究連絡をとりながら研究をすすめた。

- (2) 補助金の主な用途として：

- ・関連する専門書籍を購入
 - ・国内外の学会・研究集会等で資料を収集するための旅費
 - ・研究成果を国内外の学会・研究集会等で発表するための旅費
- に充てた。

4. 研究成果

- (1) パラメータの極限で微分方程式が双曲型から放物型に変化する双曲放物型の特異摂動問題に関して、時間依存制約条件を課した変分不等式の特異極限の存在を証明した。その際に時間依存劣微分発展方程式の抽象論におけるエネルギー不等式の方法を有効に活用した。さらには相分離ダイナミクスモデルについて、秩序度に温度変化を考慮したモデルについて特異極限の方法を応用して、解の構成を行った。これらの結果について日本学会秋季総合分科会で特別講演を行った。

- (2) 非線形解析の新しい枠組みとして、変分原理と不動点解析を統合した準変分解析の観点を提唱し、そのための数学的解析手段として、新しい非線形作用素のクラス(準劣微分作用素)の概念を導入した。この研究成果と関連する分野に関する論説「準変分解析」を日本数学会の依頼により機関紙「数学」に執筆した。非線形発展方程式と準変分解析に関して、平成26年度に採択された科研費(基盤(C))における研究で、今後さらに研究を進めてゆく計画である。

- (3) 合金の相分離現象を記述するために冶金学で導入されたCahn-Hilliard方程式に一般的な時間依存制約条件を課した問題を研究し、弱解と強解の概念を適切に導入することにより、弱解の存在とそれが強解になるための条件を与えた。これによって、Cahn-Hilliard方程式に関して形状最適化問題等、従来扱えなかった問題を研究する道が開かれた。

- (4) 水と石油等多成分浸透流の数学的モデルについて、Alt-Luckhaus(Math.Z.1983)による古典的な研究を一般化して、時間依存制約条件を課した問題を研究し、解の存在についての一般的な枠組みを構築することに成功した。これにより、貯水池の水位が時間に依存する場合等より現実的なモデルを数学的に扱うことができるようになった。

- (5) 回帰的対空間を持つBanach空間における時間依存生成作用素に関する非線形発展方程式を研究し、抽象的変分不等式の解の存在を証明した。これにより、時間依存制約条件を課した変分不等式の問題を L^p 空間で扱うことが可能になり、

解の性質をより詳しく研究する抽象的枠組みができた。

(6)Penrose-Fife (Physica D (1990))によって導入された温度変化を考慮した相転移ダイナミクスモデルを研究した。このモデルは熱方程式に特異かつ退化した非線形性があることが特徴であり、解析を困難にしている。従来は温度に第三種境界条件を課した問題が主として研究されていたが、Dirichlet 境界条件のもとでもモデルが適切であることを証明した。

(7)浸透流の水力学モデルとして現れる楕円 - 放物型方程式に関して、解のデータに関する連続性を証明し、それを用いて、最適制御解の存在を証明した。

(8)熱水力学の偏微分方程式 (Boussinesq 方程式) において、温度に時間依存制約条件を課した問題を研究し、解の存在を証明し、大域アトラクターの構成をおこなった。

5 . 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 14 件)

M. Kubo, Quasi-variational principles and quasi-subdifferential operators, Gakuto Internat. Series Math. Sci. & Appl. 36, Gakkotosho, Tokyo, 2013, 165—174.

久保雅弘, 準変分解析, 数学 64 (2013), 385--401.

M. Kubo, Quasi-subdifferential operators and evolution equations, Discrete Contin. Dyn. Syst. suppl. (2013), 447--456.

M. Kubo, The Cahn-Hilliard equation with time-dependent constraint, Nonlinear Anal. 75 (2012), 5672--5685.

M. Kubo, K. Shirakawa, N. Yamazaki, Variational inequalities for a system of elliptic-parabolic equations, J. Math. Anal. Appl. 387 (2012), 490--511.

K. Kumazaki, M. Kubo, Variational inequalities for a non-isothermal phase field model, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S 4 (2011), 409--421.

T. Fukao, M. Kubo, Global attractor of double obstacle problems in thermohydraulics, Gakuto Internat. Series Math. Sci. & Appl. 32, Gakkotosho, Tokyo, 2010, 273—287.

M. Kubo, Variational inequalities with time-dependent constraints in L^p , Nonlinear Anal. 73 (2010), 390--398.

M. Kubo, K. Kumazaki, A system of evolution equations for non-isothermal phase transitions, J. Evol. Equ. 10 (2010), 129--145.

K. Kumazaki, A. Ito, M. Kubo, Generalized solutions of a non-isothermal phase separation model, Discrete Contin. Dyn. Syst. suppl. (2009), 476--485.

T. Fukao, M. Kubo, Time-dependent obstacle problem in thermohydraulics, Discrete Contin. Dyn. Syst. suppl. (2009), 240--249.

K. Kumazaki, A. Ito, M. Kubo, A non-isothermal phase separation with constraints and Dirichlet boundary condition for temperature, Nonlinear Anal. 71 (2009), 1950--1963.

M. Kubo, Singular perturbations for variational inequalities with time-dependent constraints, J. Math. Anal. Appl. 356 (2009), 60--68.

M. Kubo, N. Yamazaki, Convergence and optimal control problems for elliptic-parabolic variational inequalities with time-dependent constraints, Adv. Math. Sci. Appl. 19 (2009), 155--183.

[学会発表] (計 8 件)

村瀬勇介, 久保雅弘, 準劣微分作用素によって生成される楕円型変分不等式と仮似変分不等式, 日本数学会年会, 学習院大学, 2014年3月

M. Kubo, Quasi-variational principles and quasi-subdifferential operators, 5th Polish-Japanese Days on Nonlinear Analysis in Interdisciplinary Sciences, November 5-9, 2012, Kyoto, Japan.

M. Kubo, Quasi-subdifferential operators and quasi-subdifferential evolution equations, 非平衡現象における発展方程式論の新展開, 数理解析研究所, 2012年10月9-11日.

M. Kubo, A new class of nonlinear evolution equations, The 9th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Orlando, Florida, USA, July 1 - 5, 2012.

山崎教昭, 久保雅弘, 白川健, A vector-valued elliptic-parabolic variational inequality with time-dependent constraint, 日本数学会年会, 東京理科大学, 2012年3月28日

M. Kubo, Time-dependent obstacle problems for a system of elliptic-parabolic equations, The 3rd Nagoya Workshop on Differential

Equations, Nagoya, Japan, February, 2011.

深尾武史, 久保雅弘, ある障害物問題の時間局所・大域解と大域的アトラクターについて, 日本数学会秋季総合分科会, 大阪大学, 2009年9月25日.

久保雅弘, (特別講演) 非線形発展方程式と変分不等式の特異摂動, 日本数学会秋季総合分科会, 大阪大学豊中キャンパス, 2009年9月25日.

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

〔その他〕(なし)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

久保 雅弘 (KUBO, Masahiro)
名古屋工業大学・工学研究科・教授
研究者番号: 80205129

(2) 研究分担者(なし)

(3) 連携研究者

山崎 教昭 (YAMAZAKI, Noriaki)
神奈川大学・工学部・/ 教授
研究者番号: 90333658