

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 18 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2009～2013

課題番号：21540174

研究課題名(和文)多項式と超越整関数の複素力学系の双方向的研究

研究課題名(英文) Bidirectional research between complex dynamics of polynomials and transcendental entire functions

研究代表者

木坂 正史 (Kisaka, Masashi)

京都大学・人間・環境学研究科(研究院)・准教授

研究者番号：70244671

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円、(間接経費) 1,020,000円

研究成果の概要(和文)：多項式および超越整関数の力学系を個別にまた双方向的に主に複素解析的手法を用いて研究した。特に著しい結果として、与えられた多項式に対してその力学系的性質を部分力学系として持つ超越整関数を擬等角手術の方法で構成した。またこの手法の応用として例えば、(1) Julia集合がSierpinskiカーペットとなるような超越整関数、(2) Cremer点を持つがJulia集合が局所連結となるような超越整関数、を構成した。これらはいずれも多項式の力学系では起こらない現象を示す新たな例となった。

研究成果の概要(英文)：We investigated the dynamics of polynomials and transcendental entire functions both individually and bidirectionally by mainly using complex analytic methods. As a remarkable result, for a given polynomial P we constructed a transcendental entire function which has the dynamics of P as its subdynamics by quasiconformal surgery. Also as an application of this method, we constructed, for example, (1) a transcendental entire function whose Julia set is a Sierpinski carpet, (2) a transcendental entire function which has a Cremer point but whose Julia set is locally connected. These are new examples which show new phenomena which never occur for polynomial dynamics.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：超越整関数 Julia集合 Fatou集合 多項式

1. 研究開始当初の背景

整関数は多項式と超越整関数の2つに分類される。前者は Riemann 球面上の力学系と見なせるのに対し、後者は無限遠点が真性特異点であるためにできない。従って両者の力学系的性質は一般に著しく異なる。一方超越整関数は多項式の広義一様収束極限として表現されるので、両者の間に何らかの関係があるのも事実である。本研究の代表者は複素力学系の研究開始当初から「多項式の力学系を研究することによって超越整関数の力学系を理解できないか?」ということを考えており、例えば、多項式の列がある超越整関数に広義一様収束しているときに、ある条件下で多項式の Julia 集合が超越整関数の Julia 集合に Hausdorff 収束することを証明していた (M.Kisaka, Local uniform convergence and convergence of Julia sets, Nonlinearity 8 (1995), 273 -- 281)。また研究の方向としてこれの逆、即ち「超越整関数の結果から多項式の力学系の結果を導く」という、意外とも思えるものもあり得る。例えば連携研究者である穴倉による、Cremer point をもつ2次多項式の Julia 集合の位相的性質に関する研究 (unpublished) がそうである。このように多項式、超越整関数の力学系の研究を個別に行うだけでなく、それと同時に「双方向的」に行うことが今後、複素力学系研究の発展のためには極めて重要になってくると考えるに至った。

2. 研究の目的

本研究では多項式と超越整関数、両者の力学系的性質を個別に研究すると同時に、双方向的研究、即ち多項式の力学系の結果から超越整関数の力学系の結果を得ること、更にはその逆に、超越整関数に関する結果から多項式に関する結果を導くことを目指した。具体的には例えば多項式の力学系については「近放物型不動点のくりこみ理論」の応用による研究を、超越整関数の力学系についてはジュリア集合やファトゥ集合の位相的性質をはじめとする一般論の展開と、指数関数族や三角関数族などの具体的な関数特有の力学系的性質を明らかにすることを、個別にまた双方向的に行うことを目標とした。

3. 研究の方法

(1) 様々な先行研究を理解すると同時に、既存の函数論の手法や複素力学系の手法を組み合わせることで問題解決の方法を試行錯誤しながら模索する。

(2) 取り組む問題によって適宜コンピュータグラフィックスを用いて現象の把握、予想される数学的事実の発見、また逆に示した一般論の具体例による検証などを行う。

(3) 日本数学会の総合分科会や数理解析研究所での力学系、複素力学系、また函数論関係

の研究集会などに積極的に参加し、新たな知見を得ると同時に、本研究によって得られた成果を発表する。更には海外での研究集会にも参加して、日本より多くいる海外の複素力学系研究者とのディスカッションを通じて問題解決のヒントを得たり、研究の新たな方向性などを探る。

4. 研究成果

主な研究成果は以下の通りである：

多項式の力学系について

(1) 「近放物型不動点のくりこみ理論」の応用の1つとして、Siegel 円板または Cremer 点をもつ2次多項式のジュリア集合の位相的構造の詳細な表示を与えた。特に Cremer 点をもつ2次多項式のジュリア集合は正確な図をコンピューターで描くのは不可能であるため、実際にどのような「形」をしているのかは今まで未知であった。

(2) 「双曲型である多項式のジュリア集合が連結であるならば局所連結になる」という結果の別証明 (path connectedであることを直接示す) を与えた。

(3) 2次多項式のときに Douady-Hubbard によって考えられていた straightening map という概念を3次以上の一般の d -次多項式の場合に考え、それが disjoint type でない限り不連続になることを示した。

(4) 2つの有理写像がそれぞれ polynomial-like restriction を持ち、もしそれらが解析的共役になるならば、この2つの有理写像は共通の有理写像に半共役である。また同様の結果が「有理写像」を「多項式」または「超越整関数」に置き換えても成立する。

(5) Axiom A を満たす多項式 skew product で与えられる力学系に対して(1)集積集合、(2)各点集積集合、(3)成分集積集合、の3つの集合を考え、これらの集合間の相互関係を調べた。例えば各点集積集合と成分集積集合が一致するための必要十分条件を与えた。

(6) 実の2次多項式族に関する Jacobson の定理に対して複素力学系の Yoccoz puzzle を用いた別証明を与えた。また同時に絶対連続な不変測度をもつパラメーター集合の測度の下からの定量的な評価を与えた。これは今までに知られている評価よりはるかに改善されたものである。

(7) 「近放物型不動点のくりこみ理論」の応用として、2次多項式族の Mandelbrot 集合についてサテライト型で無限回くりこみ可能なパラメータで、ある条件を満たすようなものに対してはその点において Mandelbrot 集

合は局所連結になることを証明した。

超越整関数の力学系について：

(8) 「構造有限型」という「特異有限型」に含まれる特殊なクラスの超越整関数について、Siegel 円板が存在すれば、その境界には漸近値が必ず存在することを示した。

(9) 指数関数族の Julia 集合には「hair」と呼ばれる構造がある。これは無限遠に伸びる曲線の族で各曲線上の点は反復合成により無限遠に発散する。また1つの曲線全体は力学系により曲線族内の他の曲線に写り、その写り方は適当な記号力学系で記述される。また各曲線は滑らか(即ち、無限回微分可能)である。以上の指数関数特有の結果が同様に成り立つような一般的な枠組みを証明し、更にその応用として構造有限型超越整関数のある部分族に対して実際に「hair」が存在し、それが無限回微分可能な曲線であることを証明した。

(10) Fatou 集合が非有界成分を持つときには Julia 集合が局所連結にならない、という結果に対する別証明を与えた。

(11) Julia 集合が Sierpinski カーペット(即ち、連結、局所連結、全疎な閉集合であって補集合の境界が互いに素な Jordan 閉曲線であるようなもの)になるための十分条件を与え、更にその条件を満たすような超越整関数でいくらかでも遅い増大度を持つようなものを擬等角手術の方法によって構成した。

(12) Baker 領域を持つ超越整関数が多項式列で複素平面上で広義一様に近似されているとき、もしその多項式の Julia 集合が連結ならば、多項式の無限遠点の吸引領域は Baker 領域に核収束しないことを示し、またこの現象を具体例で考察した。

(13) 超越整関数の力学系について：与えられた多項式 P に対して、超越整関数 f で f のある円板への制限が擬多項式写像になり、それが P と擬等角共役になるようなものを擬等角手術の方法によって構成した。更にこのような f でいくらかでも遅い増大度を持つようなものが構成できることを示した。またこの一般原理の応用として次の2つを示した：(I) 超越整関数 f で与えられた種類と個数(ただし有限個)の Fatou 成分(ただし Baker 領域と遊走領域を除く)を持つようなものを構成した。これは「与えられた種類と個数(無限個も可)の Fatou 成分を持つ超越整関数が存在するか」という問題の部分的解決を与える。(II) 超越整関数で Cremer 点を持ち、しかも Julia 集合が局所連結になるようなものを構成した。多項式の場合は Cremer 点を持てば Julia 集合が局所連結にはならないことが知られているので、この例は多項式

の場合には起こらない現象を示す新たな一例となる。またこの例の構成には多項式 P の力学系的性質が必要であり、この点においてこれは多項式の力学系の結果から超越整関数の力学系の結果を得たものだと言える。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計16件)

(1)M.Kisaka, On topological properties of Fatou sets and Julia sets of transcendental entire functions, to appear in Sugaku Expositions, American Mathematical Society, 査読有。

(2)木坂正史, 超越整関数の Fatou 集合 Julia 集合の位相的性質について, 数学, 査読有, 65, 2013, 269--298.

(3)S.Nakane, Postcritical sets and saddle basic sets for Axiom A polynomial skew products on C^2 , Ergodic Theory and Dynamical Systems, 査読有, 33, 2013, 1124--1145.

(4)H.Inou and J.Kiwi, Combinatorics and topology of straightening maps, I: Compactness and bijectivity, Advances in Mathematics, 査読有, 231, 2012, 2666--2733.

(5)S.Nakane, An example of non Axiom A polynomial skew products, 東京工芸大学工学部紀要, 査読有, 34, 2012, 20--26.

(6)M.Kisaka and M.Shishikura, Smoothness of hairs for some transcendental entire functions, Sūrikaiseikikenkyūsho Kōkyūroku, 査読無, 1762, 2011, 30-38.

(7)H.Inou, Extending local analytic conjugacies, Transactions of the American Mathematical Society, 査読有, 363, 2011, 331-343.

(8)M.Shishikura, Combinatorial representation of irrational rotations and invariant sets around irrationally indifferent fixed points, Sūrikaiseikikenkyūsho Kōkyūroku, 査読無, 1688, 2010, 1--6.

(9)S.Morosawa, Siegel disks of transcendental entire functions and singular values, Sūrikaiseikikenkyūsho Kōkyūroku, 査読無, 1699, 2010, 68--72.

[学会発表](計 54 件)

(1)M.Kisaka, Construction of transcendental entire functions of slow growth with prescribed polynomial dynamics, International Conference on Advances in Dynamical Systems, Royal Heritage Hotel, Kishangarh, India, Mar.11.2014.

(2)M.Kisaka, Transcendental entire functions of slow growth with prescribed polynomial dynamics, 2013 年度冬の力学系研究集会, 広島大学, 2014 年 1 月 13 日.

(3)M.Kisaka, Constructions of transcendental entire functions whose Julia sets are Sierpinski carpet, Topological and Combinatorial Problems in One-dimensional Complex Dynamics, Centro di Ricerca Matematica Ennio De Giorgi, Pisa, Italy, Oct. 16. 2013.

(4)M.Shishikura, Satellite renormalization for complex quadratic polynomials, Topological and Combinatorial Problems in One-dimensional Complex Dynamics, Centro di Ricerca Matematica Ennio De Giorgi, Pisa, Italy, Oct. 14. 2013.

(5)M.Kisaka, Transcendental entire functions whose Julia sets are Sierpinski carpet, Advanced School and Workshop in Real and Complex Dynamics, International Centre for Theoretical Physics, Trieste, Italy, May 28. 2013.

(6)M.Kisaka, Transcendental entire functions whose Julia sets are Sierpinski carpet, Workshop on the role of complex analysis in complex dynamics, International Centre for Mathematical Sciences, Edinburgh, UK, May 21. 2013.

(7)木坂正史, Julia 集合が Sierpinski カーペットとなる超越整関数の構成について, 東北複素解析セミナー, 東北大学, 2013 年 4 月 24 日.

(8)木坂正史, $J(f)$ が Sierpinski カーペットとなる超越整関数について, 2013 年日本数学会年会, 京都大学吉田キャンパス, 2013 年 3 月 22 日.

(9)木坂正史, 超越整関数の Julia 集合の局所連結性について, 2012 年度冬の力学系研究集会, 日本大学軽井沢研修所, 2013 年 1 月 12 日.

(10)諸澤俊介, Caratheodory convergence to Bakder domains or wandering domains, 研究集会「複素力学系の新展開」, 京都大学数

理解析研究所, 2012 年 12 月 12 日.

(11)M.Shishikura, Straight brush model for irrationally indifferent fixed points of holomorphic functions, Workshop on Non-uniformly Hyperbolic and Neutral One-dimensional Dynamics, National University of Singapore, April.24.2012.

(12) 中根静男, On saddle basic sets for Axiom A polynomial skew products on \mathbb{C}^2 , 「複素力学系の総合的研究」研究集会, 京都大学数理解析研究所, 2012 年 1 月 26 日.

(13) 宍倉光広, Yoccoz puzzle を用いた Jacobson の定理の証明, 「複素力学系の総合的研究」研究集会, 京都大学数理解析研究所, 2012 年 1 月 24 日.

(14)木坂正史, Smoothness of hairs for some structurally finite entire functions, 等角写像論・値分布論研究集会, 金沢大学サテライトプラザ, 2011 年 12 月 3 日.

(15)木坂正史, 超越整関数の Fatou 集合, Julia 集合の位相的性質について, 日本数学会 2011 年度秋季総合分科会 特別講演, 信州大学, 2011 年 9 月 30 日.

(16)M.Shishikura, Near-parabolic renormalization and Siegel disks, Gottingen-Penn State International Summer School on Dynamical Systems, Goettingen university, Germany, Aug.9.2011.

(17)M.Kisaka, Smoothness of hairs for some transcendental entire functions, Gottingen-Penn State International Summer School on Dynamical Systems, Gottingen university (Germany), Aug. 9. 2011.

(18)H.Inou, Bifurcation of the cubic polynomial family, Frontiers in Complex Dynamics, Banff Center (Canada), Feb.24. 2011.

(19)M.Kisaka, Smoothness of hairs for some transcendental entire functions, 2010 年度冬の力学系研究集会, 東京工業大学, 2011 年 1 月 8 日.

(20)木坂正史, Smoothness of hairs for some transcendental entire functions, 研究集会「複素力学系とその周辺分野の研究」, 京都大学理学部, 2010 年 12 月 7 日.

(21)M.Shishikura, Smoothness of hairs for some transcendental entire functions, CODY Autumn in Warsaw (Workshop on Transcendental Dynamics), Institute of Mathe-

ematics of the Polish Academy of Sciences (Warsaw, Poland), Nov.12.2010.

(22)木坂正史, Smoothness of hairs for some entire functions, 力学系研究集会--理論から応用へ, 応用から理論へ--, 京都大学数理解析研究所, 2010年9月30日.

(23)木坂正史, Modulus of local connectivity of Julia sets of rational maps, 日本数学会 2010年度秋季総合分科会, 名古屋大学, 2010年9月23日.

(24)M.Kisaka, Some topological properties of Julia components of transcendental entire functions, INTERNATIONAL CONGRESS of MATHEMATICIANS (ICM2010) Hyderabad, India (August 19--27, 2010), August 21, 2010.

(25)稲生啓行, Extending local holomorphic conjugacies, 研究集会「Integrated Research on Complex Dynamics and its Related Fields」, 京都大学 大学院人間・環境学研究科, 2009年12月15日.

(26) 諸澤俊介, Siegel disks of transcendental entire functions and singular values, 研究集会「Integrated Research on Complex Dynamics and its Related Fields」, 京都大学 大学院人間・環境学研究科, 2009年12月16日.

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕
出願状況(計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況(計0件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1)研究代表者
木坂正史(KISAKA MASASHI)
京都大学大学院・人間・環境学研究科・
准教授

研究者番号: 70244671

(2)研究分担者
()

研究者番号:

(3)連携研究者
宍倉光広(SHISHIKURA MITSUHIRO)
京都大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 70192606

稲生啓行(INOU HIROYUKI)
京都大学・大学院理学研究科・講師
研究者番号: 00362434

中根静男(NAKANE SHIZUO)
東京工芸大学・工学部・教授
研究者番号: 50172359

諸澤俊介(MOROSAWA SHUNSUKE)
高知大学・理学部・教授
研究者番号: 50220108